

# 被克尔介质包围的 $\Lambda$ 型三能级原子的粒子布居几率\*

李高翔 彭金生\*\*

(华中师范大学物理系, 武汉 430070)

周 鹏\*\*

(湖北教育学院物理系, 武汉 430060)

## 提 要

本文研究了被克尔(Kerr)介质包围的  $\Lambda$  型三能级原子的粒子布居几率随时间的演化, 分析了光场频率与原子本征频率间的单光子失谐量和克尔介质对粒子布居几率的影响.

**关键词** 克尔介质,  $\Lambda$  型三能级原子, 粒子布居几率.

## 1 引 言

与光场作用时, 可被等效为二次谐振子的克尔介质<sup>[1]</sup>以及 Jaynes-Cummings(J-C)模型<sup>[2]</sup>是量子光学的两个最基本和最典型的模型, 对它们的研究一直都十分重视. 最近, Buzek 和 Jex<sup>[3,4]</sup>将这两个模型统一起来考虑, 即假设一个二能级原子处在克尔介质的包围之中, 讨论了在相干光场作用下, 原子和光场的量子性质. 发现与 J-C 模型相比, 原子的崩塌-回复效应更有规律<sup>[3,5,6]</sup>; 由于克尔介质的影响, 光场的压缩程度显著变化等一系列有意义的结果. 但至今还未曾有人讨论过位于克尔介质腔中的三能级原子与光场作用时, 原子和光场的性质. 另一方面,  $\Lambda$  型三能级原子在激光冷却问题中起着重要的作用, 它是低于多普勒(Doppler)冷却极限的基础<sup>[8]</sup>, 因此继续研究  $\Lambda$  型三能级原子与光场的作用仍属必要.

本文将 Buzek 等人讨论的模型<sup>[3~6]</sup>进行推广, 即假设一个  $\Lambda$  型三能级原子在充满克尔介质的高 Q 腔中, 与腔场发生作用. 分别研究了光场频率与原子本征频率间的单光子失谐量和克尔介质对原子粒子布居数的影响. 结果发现, 当二次谐振子的强度不强时, 原子的粒子布居数呈现出量子崩塌-回复效应, 但当二次谐振子的强度较强时, 粒子布居几率  $P_1(t)$  ( $P_2(t)$ ) 则表现为一余弦振荡. 并且比较了光场频率与原子本征频率间的单光子失谐量和克尔介质对原子动力学行为的不同影响.

## 2 模型及态矢

收稿日期: 1992年6月29日; 收到修改稿日期: 1992年9月14日

\* 本课题由国家自然科学基金资助.

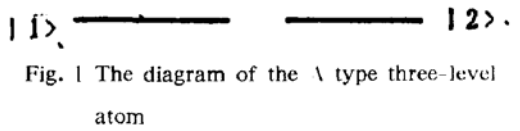
\*\* 中国高等科学技术中心

考虑如图 1 所示的  $\Lambda$  型三能级原子, 让其处于充满克尔介质的高 Q 腔中, 原子和克尔介质均同单模腔场耦合, 克尔介质在绝热近似下与光场作用时可用二次谐振子描述<sup>[1,3~6]</sup>. 在旋波近似下, 系统的哈密顿可以写为:

$$H = H_0 + V \quad (1)$$

$$H_0 = \nu a^\dagger a + \sum_i \omega_i C_i^\dagger C_i \quad (\hbar = 1) \quad (2)$$

$$V = \chi a^{+2} a^2 + g(a^\dagger c_1^\dagger c_3 + a c_3^\dagger c_1) + g(a c_3^\dagger c_2 + a^\dagger c_2^\dagger c_3) \quad (3)$$



式中  $a^\dagger, a$  为频率  $\nu$  的光场的产生、湮没算符,  $c_i^\dagger, c_i$  为原子第  $i$  能级的费米产生、湮没算符.  $\omega_i$  为原子第  $i$  能级的本征频率,  $g$  为原子-光场的耦合常数,  $\chi$  为二次谐振子的强度. 为计算简单起见, 只考虑双光子共振情况, 即假设  $\omega_1 = \omega_2$ . 在相互作用绘景中, 系统的相互作用哈密顿为:

$$V'(t) = \chi a^{+2} a^2 + g(a^\dagger c_1^\dagger c_3 e^{-i\omega_1 t} + a c_3^\dagger c_1 e^{i\omega_1 t} + a c_3^\dagger c_2 e^{i\omega_2 t} + a^\dagger c_2^\dagger c_3 e^{-i\omega_2 t}) \quad (4)$$

式中  $\Delta = \omega_3 - \omega_2 - \nu = \omega_3 - \omega_1 - \nu$  为单光子失谐量.

如果在  $t = 0$  时刻, 原子处在态  $|1\rangle$ , 辐射场处在相干态

$$|\alpha\rangle = \sum_n F_n |n\rangle, \quad F_n = e^{-\bar{n}/2} \frac{\bar{n}^n}{\sqrt{n!}} e^{i\alpha\zeta} \quad (5)$$

式中  $\bar{n}$  为辐射场的初始平均光子数,  $\zeta$  为  $\alpha$  的相位角. 于是系统在初始时刻的态矢为:

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n F_n |1, n\rangle \quad (6)$$

随着时间的演化, 在相互作用绘景中, 系统在  $t > 0$  时刻的态可写为

$$|\psi'(t)\rangle = \sum_n C_1^n(t) |1, n\rangle + C_2^n(t) |\alpha, n\rangle + C_3^{n-1}(t) |3, n-1\rangle \quad (7)$$

将(5), (7)两式代入相互作用绘景中的薛定谔(Schrodinger)方程, 可得:

$$\begin{cases} i\dot{C}_1^n(t) = \chi n(n-1)C_1^n(t) + g\sqrt{n}C_3^{n-1}(t)e^{-i\omega_1 t} \\ i\dot{C}_2^n(t) = \chi n(n-1)C_2^n(t) + g\sqrt{n}C_3^{n-1}(t)e^{-i\omega_1 t} \\ i\dot{C}_3^{n-1}(t) = \chi(n-1)(n-2)C_3^{n-1}(t) + g\sqrt{n}e^{i\omega_2 t}[C_1^n(t) + C_2^n(t)] \end{cases} \quad (8)$$

利用(6)式, 容易得到方程组(8)的解为:

$$\begin{cases} C_1^n(t) = e^{-i\alpha(n-1)\zeta} \left\{ \frac{g^2 n}{2\lambda(n)} F_n \left[ \frac{e^{i(n\chi - 1/2 + \lambda(n))t} - 1}{n\chi - \Delta/2 + \lambda(n)} - \frac{e^{i(n\chi - 1/2 - \lambda(n))t} - 1}{n\chi - \Delta/2 - \lambda(n)} \right] + F_n \right\} \\ C_2^n(t) = e^{-i\alpha(n-1)\zeta} \frac{g^2 n}{2\lambda(n)} F_n \left[ \frac{e^{i(n\chi - 1/2 + \lambda(n))t} - 1}{n\chi - \Delta/2 + \lambda(n)} - \frac{e^{i(n\chi - 1/2 - \lambda(n))t} - 1}{n\chi - \Delta/2 - \lambda(n)} \right] \\ C_3^{n-1}(t) = \frac{-g\sqrt{n}}{2\lambda(n)} F_n [e^{i(-n\chi + 1/2 + \lambda(n))t} - e^{i(-n\chi + 1/2 - \lambda(n))t}] \end{cases} \quad (9)$$

式中  $\lambda(n) = \sqrt{(n\chi - \Delta/2)^2 + 2g^2 n}$  是与原子拉比(Rabi)振荡频率有关的参数. 这样就完全确定了任意时刻  $t$  系统在相互作用绘景中的态矢.

### 3 单光子失谐量 $\Delta$ 对原子粒子布居数的影响

利用(9)式, 容易求得  $t$  时刻原子在第  $i$  能级上的粒子布居数:

$$P_1(t) = \sum_n |C_n(t)|^2 = \frac{3}{8} + \sum_n |F_n|^2 \left\{ \frac{g^2 n}{4\lambda^2(n)} \cos 2\lambda(n)t + \frac{g^2 n}{2\lambda(n)} \left[ \frac{\cos(\lambda(n) - n\chi + \Delta/2)t}{\lambda(n) - n\chi + \Delta/2} + \frac{\cos(\lambda(n) + n\chi - \Delta/2)t}{\lambda(n) + n\chi - \Delta/2} \right] + \frac{(n\chi - \Delta/2)^2}{8\lambda^2(n)} \right\} \quad (10)$$

$$P_2(t) = \frac{3}{8} + \sum_n |F_n|^2 \left\{ \frac{g^2 n}{4\lambda^2(n)} \cos 2\lambda(n)t - \frac{g^2 n}{2\lambda(n)} \left[ \frac{\cos(\lambda(n) + n\chi - \Delta/2)t}{\lambda(n) + n\chi - \Delta/2} + \frac{\cos(\lambda(n) - n\chi + \Delta/2)t}{\lambda(n) - n\chi + \Delta/2} \right] + \frac{(n\chi - \Delta/2)^2}{8\lambda^2(n)} \right\} \quad (11)$$

$$P_3(t) = \sum_n |F_n|^2 \frac{g^2 n}{2\lambda^2(n)} (1 - \cos 2\lambda(n)t) \quad (12)$$

在图 2 中,令  $\chi = 0$ ,即忽略克尔介质的影响.图 2(a)表明,当  $\Delta = 0$  时,即当系统满足单光子共振时,粒子布居数  $P_1(t), P_2(t)$  呈现出量子崩塌-回复效应.随着  $\Delta$  的增大,但  $\Delta^2/4 \ll 2g^2\bar{n}$ ,从图 2(b) ( $\Delta = g$ ) 可以看到,此时  $P_1(t), P_3(t)$  仍然呈现出与图 2(a) 回复次数相同的崩塌-回复效应,与图 2(a) 相比,由于单光子失谐量  $\Delta$  的影响,  $P_1(t), P_3(t)$  的第一次衰减时间变短,  $P_1(t), P_3(t)$  近似为常数的时间变长,这说明随着  $\Delta$  的增大,  $P_1(t), P_3(t)$  的崩塌时间变短,回复周期变长.图 2(c) ( $\Delta = 32g$ ) 显示的是一极端情况,即:  $\Delta^2/4 \gg 2g^2\bar{n}$ ,与图 2(a)、图 2(b) 相比,  $P_1(t)$  的回复周期显著变长,第一次回复后的振荡幅度很小,第二次回复后的衰减振荡也比图 2(a)、图 2(b) 要规律得多;此时  $P_3(t)$  的幅值很小,几乎为零.

由于光场初始时为相干光场,当  $\bar{n} \gg 1$  时,光子涨落是  $\langle \Delta n \rangle^2 = \bar{n}$ ,因此在对(10)~(12)式中的  $n$  求和时,其主要贡献来源于  $n$  取  $(\bar{n} - \sqrt{\bar{n}}) < n < (\bar{n} + \sqrt{\bar{n}})$  范围的值,故对于  $\Delta^2/4 \gg 2g^2\bar{n}$  的情况,可作近似  $\lambda(n) \simeq \Delta/2 + 2g^2 n/\Delta$ , 于是

$$P_1(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-2\bar{n} \sin^2 \frac{g^2}{\Delta} t) \cos(\bar{n} \sin \frac{2g^2}{\Delta} t) \quad (13)$$

$$P_2(t) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-2\bar{n} \sin^2 \frac{g^2}{\Delta} t) \cos(\bar{n} \sin \frac{2g^2}{\Delta} t) \quad (14)$$

$$P_3(t) \approx 0 \quad (15)$$

如果令  $\lambda = g^2/\Delta$ ,则  $P_1(t) - P_2(t)$  与文献[7]关于与光场发生喇曼双光子过程和二能级原子的动力学行为完全相同.比较图 2(c)和由(13)式得出的图 2(d)发现,两者相同.这表明,当  $\Delta^2/4 \gg 2g^2\bar{n}$  时,与光场相互作用的  $\Lambda$  型三能级原子系统中,对原子动力学行为支配作用的是喇曼双光子过程,从而原子-光场耦合系统的相互作用哈密顿可由  $\lambda a^\dagger a (s_+ + s_-)$  描述,  $s_+, s_-$  为二能级原子的赝自旋算符.

#### 4 克尔介质对原子粒子布居数的影响

为讨论方便起见,这里令  $\Delta = 0$ .图 3(a) ( $\chi = 0.1g$ ) 表明,当  $\chi^2 \bar{n}^2 \ll 2g^2\bar{n}$  时,  $P_1(t)$  和  $P_3(t)$  仍然呈现出崩塌-回复效应.与图 2(a) 相比,由于克尔介质的影响,使得  $P_1(t), P_3(t)$  第一次衰减变的时间随着  $\chi$  的增大而增大,  $P_1(t), P_3(t)$  保持为常数的时间变短,换句话说,  $\chi$  的增大使得  $P_1(t), P_3(t)$  的崩塌时间变长,回复周期变短.继续增大二次谐振子的强度  $\chi$ ,当  $\chi = 0.5g$  时,此时  $\chi^2 \bar{n}^2 = 2.5g^2\bar{n}$ ,从图 3(b) 可以看出,  $P_1(t)$  呈现出振荡幅度衰减的余弦振荡,  $P_3(t)$  则表现出较规则的回复-崩塌效应,并且  $P_3(t)$  的幅值明显减小,这时原子的动力学行为与图 2 和图 3(a) 完全不同.如果考虑极端情况,即  $\chi^2 \bar{n}^2 = 2g^2\bar{n}$ ,图 3(c) 表明,  $P_1(t)$  表现为余弦振荡,其振幅几乎不变,而  $P_3(t)$  的幅值此时近似为 0.与前面相似,下面对这一极端情况作解析分析,作近

似  $\lambda(n) \simeq n\chi + g^2/2\chi$  是合理的. 从而

$$P_1(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{g^2}{x} t \quad (16)$$

$$P_2(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{g^2}{x} t \quad (17)$$

$$P_3(t) \simeq 0 \quad (18)$$

(16)、(18)式与图 3(c)准确相符,它表明  $P_1(t)$  在  $x^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时呈现出一频率为  $(2\pi)/g$ 、振幅为  $1/2$  的余弦振荡,  $P_3(t)$  幅值近似为 0. 其性质完全区别于  $P_1(t)$  在  $x^2\bar{n}^2 \ll 2g^2\bar{n}$  时的情况.

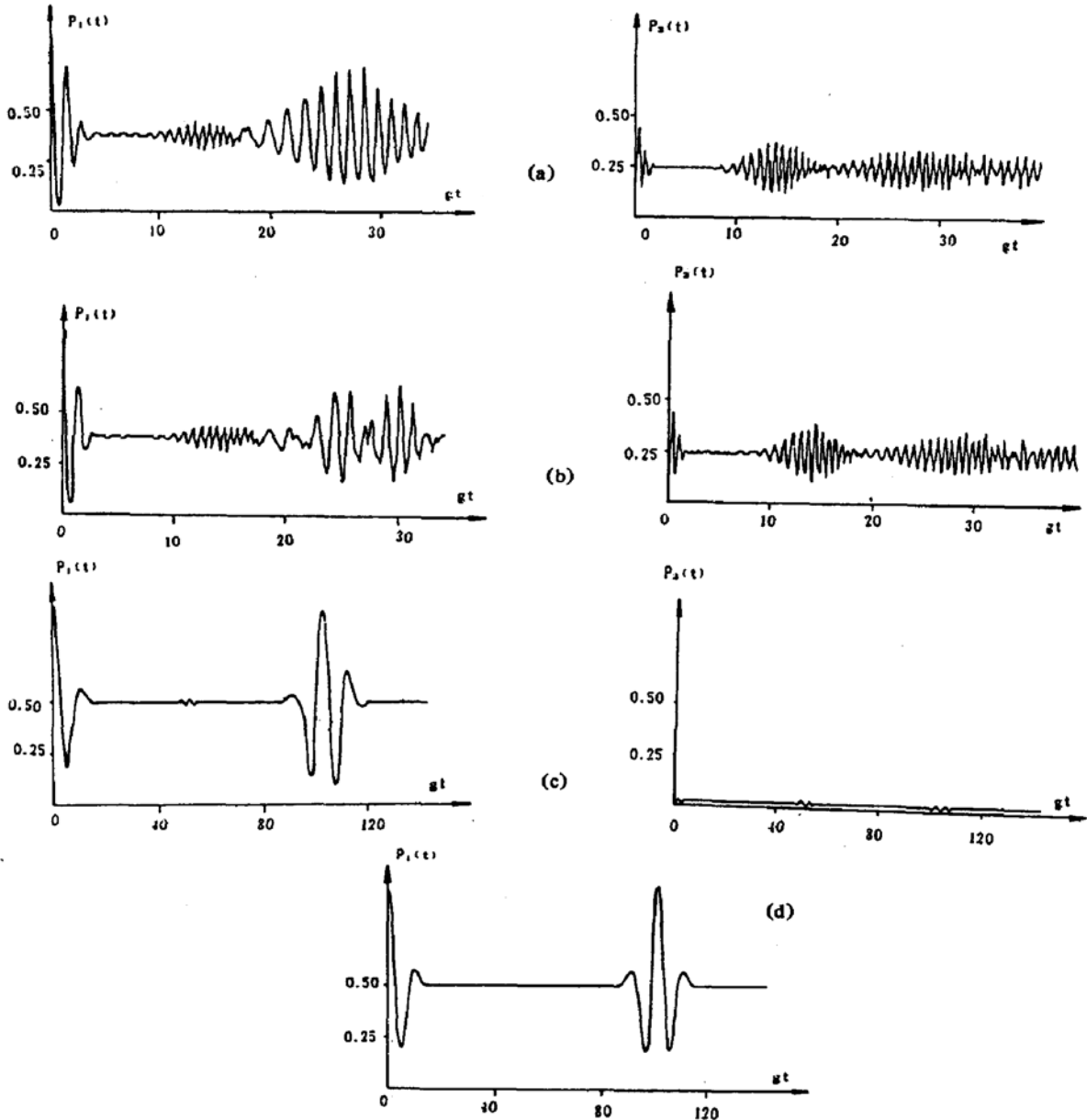


Fig. 2 The time evolution of the populations  $P_1(t)$ ,  $P_3(t)$   $\bar{n} = 10$ ,  $x = 0$

(a)  $\Delta = 0$ , (b)  $\Delta = g$ , (c)  $\Delta = 32g$  (d)  $\Delta = 32g$

克尔介质对原子的拉比振荡频率  $\lambda(n)$  的影响同光场频率与原子本征频率间的单光子失谐量  $\Delta$  相似,即克尔介质通过光场耦合使得原子-光场发生单光子跃迁时具有失谐量  $n\chi^{[3,6]}$  ( $\Delta = 0$ ),但比较图 2(a)~图 2(c)和图 3(a)~图 3(c)显示的规律发现,这两种单光子失谐量对

原子的粒子布居数的影响则不同. 这是因为克尔介质通过与光场的作用对原子的非线性影响使得原子-光场系统具有的单光子失谐量  $n\lambda$  强烈依赖于光子数  $n$ , 而  $\lambda$  则与  $n$  无关, 使得两种单光子失谐量具有本质的差别, 导致图 2(a)~图 2(c)与图 3(a)~图 3(c)显示的变化规律不同.

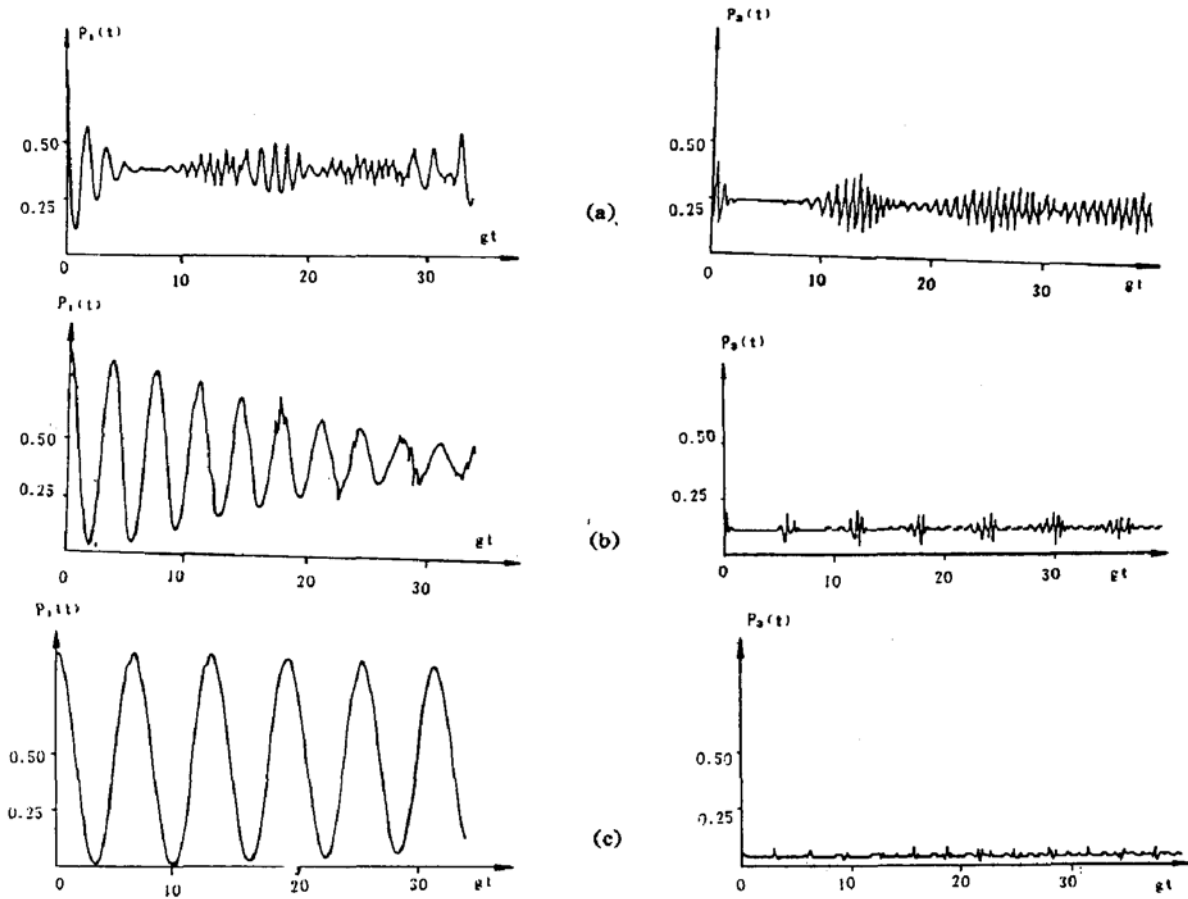


Fig. 3 The time evolution of the populations  $P_1(t)$ ,  $P_3(t)$ ,  $\bar{n}=10, \lambda=0$

(a)  $\lambda/g=0.1$ , (b)  $\lambda/g=0.5$ , (c)  $\lambda/g=1$

另外, (13)~(15)式表明, 当  $\lambda^2/4 \gg 2g^2\bar{n}$  时, 与光场作用的  $\Lambda$  型三能级原子系统中由于双光子过程占据主要地位, 此时能够忽略能级  $|3\rangle$  的影响. 而用  $\lambda a^+ a(s_+ + s_-)$  描述其性质, 而从 (16)~(18)式发现, 虽然在  $\lambda^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时,  $P_3(t) \simeq 0$ , 即系统也是喇曼双光子过程占据主要地位, 但 (16)、(17)式表明, 此时原子-光场耦合系统却不能用  $\lambda a^+ a(s_+ + s_-)$  描述. 这是由于单光子失谐量  $n\lambda$  与  $n$  有关, 它强烈依赖于能级  $|3\rangle \leftrightarrow |1\rangle$  和  $|3\rangle \leftrightarrow |2\rangle$  间的单光子跃迁, 因此不能用与光场发生喇曼双光子作用的二能级原子系统来描述系统的性质.

值得指出的是, Buzek 等人<sup>[3,5~6]</sup>研究了被克尔介质包围的 J-C 模型中原子的动力学性质, 发现当  $\lambda^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时, 原子呈现出回复周期为  $\pi/\lambda$  的崩塌-回复效应, 这一结论与本文的上述讨论完全不同. 导致这一差别的原因是本文考虑的是  $\Lambda$  型三能级原子, 能级  $|2\rangle$  的存在, 使得当  $\lambda^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时, 对原子动力学行为起主要影响的是双光子过程. 因而当  $\lambda^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时, 使得系统中双光子作用占据主要地位, 也正是由于  $\lambda^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时系统中双光子作用占据支配地位, 才使得  $P_1(t)$  呈现为一余弦振荡而完全区别于  $\lambda^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时  $P_1(t)$  的量子崩塌-回复效应.

## 5 结 论

总之,本文推广了 Buzek 等人的模型,研究了被克尔介质包围的  $\Lambda$  型三能级原子在与光场作用时粒子布居数随时间演化的规律. 结果发现,单光子失谐量  $\Delta$  和克尔介质均强烈影响着原子粒子布居数的演化规律. 虽然克尔介质的影响使得原子-光场耦合系统具有单光子失谐量  $n\chi$ ,但由于  $n\chi$  与  $n$  有关,与  $\Delta$  相比具有本质差别,从而对粒子布居数的影响并不相同. 此外,还发现,当二次谐振子强度  $\chi$  满足  $\chi^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时,原子粒子布居数呈现出量子崩塌-回复效应,而当  $\chi^2\bar{n}^2 \gg 2g^2\bar{n}$  时,  $P_1(t), P_2(t)$  则表现为一余弦振荡.

## 参 考 文 献

- [1] G. S. Agarwal, R. R. Puri, Collapse and revival phenomenon in the evolution of a resonant field in a Kerr-like medium, *Phys. Rev. (A)*, 1989, **A39**(6):2969~2977
- [2] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser, *Proc. IEEE*, 1963, **51**(1):89~109
- [3] V. Buzek, I. Jex, Dynamics of a two-level atom in a Kerr-like medium, *Opt. Commun.*, 1990, **78**(6):425~435
- [4] V. Buzek, I. Jex, Emission spectra of a two-level atom in a Kerr-like medium, *J. Mod. Opt.*, 1991, **38**(5):987~996
- [5] M. J. Werner, H. Risken, Quasiprobability distribution for the cavity-damped Jaynes-Cummings model with an additional Kerr medium, *Phys. Rev. (A)*, 1991, **A44**(7):4623~4632
- [6] H. T. Dung, A. S. Shumovsky, Analytic approximation to the incision of a two-level atom in a Kerr medium, *Phys. Lett. (A)*, 1991, **A160**(5):437~442
- [7] S. J. D. Phoenix, P. L. Knight, Periodicity, phase and entropy in models of two-photon resonance, *J. O. S. A. (B)*, 1990, **B7**(1):116~124  
C. C. Gerry, J. H. Eberly, Dynamics of a Raman coupled model interacting with two quantized cavity fields, *Phys. Rev. (A)*, 1990, **A42**(11):6805~6815
- [8] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser *et al.*, Laser cooling below the one-photon recoil energy by velocity-selective coherent populating trapping theoretical analysis, *J. O. S. A. (B)*, 1989, **B6**(11):2112

## Population of the $\Lambda$ type three-level atom with an additional Kerr medium

LI Gaoxiang      PENG Jinsheng

(Physics Department, Huazhong Normal University, Wuhan 430070)

ZHOU Peng

(Physics Department, Hubei College of Education, Wuhan 430060)

(Received 29 June 1992; revised 14 September 1992)

## Abstract

In this paper, we have investigated the time evolution of populations of the  $\Lambda$  type three-level atom with an additional Kerr medium. The influence of the single photon detuning between the field frequency and the atomic transition frequency, and the effect of the Kerr medium on the populations of the atom have been analysed.

**Key words** Kerr medium,  $\Lambda$  type three-level atom, atomic population