

# 三层非线性平面光波导 TM 波的精确色散关系

王子华 陈 勤

(上海科学技术大学光纤通讯研究所, 上海 201800)

## 提 要

对于介质薄膜波导的一边或两边复盖有介电常数与光强成正比的非线性介质的三种不同结构, 本文导出了三层非线性平面光波导 TM 波的精确色散关系. 对称三层非线性平面光波导的数值计算实例与有限元法的结果完全一致.

关键词 非线性平面光波导, 色散关系.

## 1 引 言

非线性平面光波导在光信息处理和集成光学方面具有广泛的应用, 因此求解其传播常数的色散方程一直是近几年来非线性光学的重要研究课题. 最常见的非线性平面光波导形式是介质薄膜被 Kerr 型(介电常数与光强成正比)非线性介质复盖. 对于这种三层非线性平面光波导, 已得到 TE 波的精确色散方程<sup>[1]</sup>. 对于 TM 波, 由于平行和垂直于界面的电场分量的同时出现, 使问题大为复杂化. 除了单轴近似条件下 TM 波的色散关系<sup>[2]</sup>以外, 一般情况的 TM 波的色散关系只有数值方法求解<sup>[3]</sup>, 至今没有得到精确的色散方程. Mihalache<sup>[4]</sup>等人导出了线性和非线性单一界面上导行的 TM 波的精确色散方程. 本文采用同样的方法导出三种不同结构三层非线性平面光波导 TM 波的精确色散关系. 色散关系为多项式方程组, 除了结构和介质参数外, 其中还含有电场边界值. 这就是说, 传播常数随传输功率大小而变化.

## 2 三层非线性平面光波导 TM 波的色散方程

三层非线性平面光波导结构如图 1 所示. 中间为线性介质薄膜(介电常数  $\epsilon_2$ , 厚度为  $d$ ), 复盖层(介电常数  $\epsilon_1$ )和衬底(介电常数  $\epsilon_3$ )为半无限均匀非线性介质. 设非线性为 Kerr 型, 其介电常数各分量为<sup>[4]</sup>:

$$\epsilon_{1zz} = \epsilon_{1z} + \alpha_{11}E_z^2 + \alpha_{12}E_x^2, \quad \epsilon_{1xx} = \epsilon_{1x} + \alpha_{11}E_z^2 + \alpha_{12}E_x^2, \quad (1)$$

$$\epsilon_{3zz} = \epsilon_{3z} + \alpha_{31}E_z^2 + \alpha_{32}E_x^2, \quad \epsilon_{3xx} = \epsilon_{3x} + \alpha_{31}E_z^2 + \alpha_{32}E_x^2, \quad (2)$$

式中  $\epsilon_{1z}$ 、 $\epsilon_{1x}$ 、 $\epsilon_{3z}$ 、 $\epsilon_{3x}$  为零电场时的介电常数,  $\alpha_{11}$ 、 $\alpha_{12}$ 、 $\alpha_{31}$ 、 $\alpha_{32}$  为非线性系数. 沿  $+x$  方向传播的 TM 波的场矢量可表示为<sup>[4]</sup>:

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [iE_x(z)\mathbf{x} + E_z(z)\mathbf{z}] \exp [i(\omega t - \beta x)] + c. c. \tag{3a}$$

$$H(\mathbf{r}, t) = H_y(z)\mathbf{y} \exp [i(\omega t - \beta x)] \tag{3b}$$

在非线性介质中,由麦克斯韦方程, TM 波各场分量满足以下关系<sup>[4]</sup>:

$$\frac{dE_x}{dz} = \frac{1}{\beta} (k_0^2 \epsilon_{zz} - \beta^2) E_z \tag{4a}$$

$$\frac{d(\epsilon_{zz} E_z)}{dz} = -\beta \epsilon_{zx} E_x \tag{4b}$$

$$H_y = -\frac{\omega \epsilon_0 \epsilon_{zx}}{\beta} E_z \tag{4c}$$

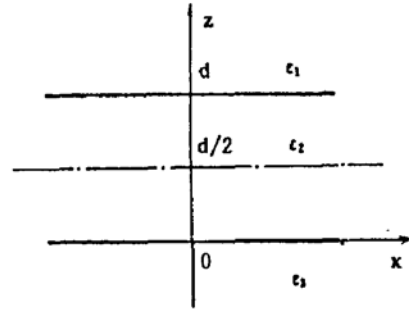


Fig. 1 Structure of a three-layer nonlinear planar optical waveguide

式中  $k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 2\pi/\lambda$  为真空中波数,  $\lambda$  为光波长,  $\beta$  为传播常数,  $\omega$  为角频率,  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  为真空介电常数和磁导率. 以下分三种情况进行研究:

### 2.1 三层对称非线性平面光波导

此时,复盖层和衬底为同一非线性介质,即  $\epsilon_1 = \epsilon_3$ . 先研究对称 TM 模.

#### 1) 对称 TM 模

当  $k_0^2 \epsilon_2 > \beta^2$  时,令  $q_2 = (k_0^2 \epsilon_2 - \beta^2)^{1/2}$ , 在线性介质薄膜层中  $E_x(z)$  和  $E_z(z)$  的解为:

$$E_x(z) = \frac{E_{dx}}{\sin(q_2 d/2)} \sin[q_2(z - d/2)] \quad 0 < z < d, \tag{5}$$

$$E_z(z) = \frac{\beta E_{dx}}{q_2 \sin(q_2 d/2)} \cos[q_2(z - d/2)] \quad 0 < z < d, \tag{6}$$

式中  $E_{dx} = E_x(d)$  为常数,  $z = d$  为非线性介质与线性介质的界面,利用电位移矢量法向分量以及电场切向分量连续的边界条件:

$$\epsilon_{1z} E_{dx}^+ = \epsilon_2 E_{dx}^-, \quad E_{dx}^+ = E_{dx}^- = E_{dx} \tag{7}$$

式中“+”和“-”分别表示界面  $z = d$  的上,下部分,即  $E_{dx}^+ = E_x(d^+)$ ,  $E_{dx}^- = E_x(d^-)$ , 余类推,得到

$$q_2 \tan(q_2 d/2) E_{dx}^+ (\epsilon_{1z} + \alpha_{11} E_{dx}^{+2} + \alpha_{12} E_{dx}^{+2}) = \beta \epsilon_2 E_{dx}, \tag{8}$$

微分(4a)并代入(4b)式,得到

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} = -k_0^2 \epsilon_{zx} E_x - \beta \frac{dE_z}{dz}, \tag{9}$$

在半无限非线性层中,由于  $z \rightarrow \pm \infty$  时,  $E, dE/dz \rightarrow 0$ , 将(9)式两边同乘  $dE_x$  积分,并利用(1)式和(4a)式,得到

$$\left( \frac{dE_x}{dz} \Big|_{z=d^+} \right)^2 = \beta^2 E_{dx}^{+2} - k_0^2 [\epsilon_{1z} E_{dx}^2 + \epsilon_{1z} E_{dx}^{+2} + \frac{\alpha_{11}}{2} (E_{dx}^4 + E_{dx}^{+4}) + \alpha_{12} E_{dx}^2 E_{dx}^{+2}], \tag{10}$$

将(4a)式两边平方后代入(10)式,整理后得

$$\begin{aligned} & \beta^2 (\epsilon_{1z} E_{dx}^{+2} + \frac{3}{2} \alpha_{11} E_{dx}^{+4} + \alpha_{12} E_{dx}^2 E_{dx}^{+2} - \epsilon_{1z} E_{dx}^2 - \frac{1}{2} \alpha_{11} E_{dx}^4) \\ & = k_0^2 E_{dx}^{+2} (\epsilon_{1z} + \alpha_{11} E_{dx}^{+2} + \alpha_{12} E_{dx}^2), \end{aligned} \tag{11}$$

(8)、(11)式联立,就是对称 TM 模的精确色散方程,其中有 3 个未知数. 给定一个  $E_{dx}$  的值,由这两个方程解出  $E_{dz}$  和  $\beta$ . 与线性情况不同,非线性波导传播常数随电场边界值也就是传输功率而变化.

### 2) 反对称 TM 模

此时,线性介质薄膜中  $E_x(z)$  和  $E_z(z)$  的解为:

$$E_x = \frac{E_{dx}}{\cos(q_2 d)} \cos[q_2(z - d/2)] \quad 0 < z < d \quad (5')$$

$$E_z = -\frac{\beta E_{dx}}{q_2 \cos(q_2 d)} \sin[q_2(z - d/2)] \quad 0 < z < d \quad (6')$$

通过同样步骤,可以得到与(8)式相仿的(8')式

$$-q_2 \tan(q_2 d/2) E_{dz}^+ (\epsilon_{1z} + \alpha_{11} E_{dz}^{+2} + \alpha_{12} E_{dx}^2) = \beta \epsilon_2 E_{dx}, \quad (8')$$

和(11)式,因此(8')和(11)式联立就是反对称 TM 模色散方程.

当  $k_0^2 \epsilon_2 < \beta^2$  时,令  $q_2 = (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_2)^{1/2}$ , 对称 TM 模色散方程(8)式中的  $\tan$  改为  $-\text{th}$ , 而反对称 TM 模色散方程(8')式中的  $\text{ctan}$  则应改为  $\text{cth}$ .

### 2.2 只有复盖层为非线性介质的非对称平面光波导

此时,复盖层介电常数  $\epsilon_1$  为 Kerr 型非线性,如(1)式所示,薄膜及衬底介电常数  $\epsilon_2$  和  $\epsilon_3$  为线性,  $\epsilon_2 \neq \epsilon_3$ .

当  $k_0^2 \epsilon_2 > \beta^2$  时,令  $q_2 = (k_0^2 \epsilon_2 - \beta^2)^{1/2}$ , 在薄膜及衬底线性介质层中  $E_x(z)$  和  $E_z(z)$  的解为:

$$E_x(z) = \begin{cases} E_{0x} [\cos(q_2 z) - \frac{\epsilon_3 q_2}{\epsilon_2 q_3} \sin(q_2 z)] & 0 < z < d \\ E_{0x} \exp(q_3 z) & z < 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$E_z(z) = \begin{cases} -\beta E_{0x} [\frac{\epsilon_3 q_2}{\epsilon_2 q_3} \cos(q_2 z) + \sin(q_2 z)] / q_2 & 0 < z < d \\ -\beta E_{0x} \exp(q_3 z) / q_3 & z < 0 \end{cases} \quad (13)$$

式中  $q_3 = (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_3)^{1/2}$ ,  $E_{0x} = E_x(0)$ ,  $z = 0$  处边界条件已自动满足. 利用  $z = d$  处的边界条件(7)式,经过同样步骤,可以得到

$$q_2 E_{dz}^+ (\epsilon_{1z} + \alpha_{11} E_{dz}^{+2} + \alpha_{12} E_{dx}^2) = \beta \epsilon_2 E_{dx} \frac{\epsilon_3 q_2 \cos(q_2 d) + \epsilon_2 q_3 \sin(q_2 d)}{\epsilon_3 q_2 \sin(q_2 d) - \epsilon_2 q_3 \cos(q_2 d)}, \quad (14)$$

和(11)式.(14)式和(11)式联立就是仅有复盖层为非线性介质情况的色散方程.

当  $k_0^2 \epsilon_2 < \beta^2$  时,令  $q_2 = (\beta^2 - k_0^2 \epsilon_2)^{1/2}$ , (11)式不变, (14)式等号右边要加“-”号,并且  $\cos$  变为  $\text{ch}$ ,  $\sin$  变为  $\text{sh}$ .

### 2.3 复盖层和衬底都是非线性介质的非对称平面光波导

此时,  $\epsilon_2$  为线性介电常数,  $\epsilon_1$  和  $\epsilon_3$  为不同的 Kerr 型非线性介电常数,如(1)和(2)式所示.

当  $k_0^2 \epsilon_2 > \beta^2$  时,  $q_2 = (k_0^2 \epsilon_2 - \beta^2)^{1/2}$ , 薄膜中  $E_x(z)$  和  $E_z(z)$  的解为:

$$E_x = \{E_{dx} \sin(q_2 z) + E_{0x} \sin[q_2(d - z)]\} / \sin(q_2 d) \quad 0 < z < d \quad (15)$$

$$E_z = \beta \{E_{dx} \cos(q_2 z) - E_{0x} \cos[q_2(d - z)]\} / q_2 \sin(q_2 d) \quad 0 < z < d \quad (16)$$

利用  $z = 0$  和  $z = d$  处的边界条件,可以得到

$$q_2 E_{0x}^- (\epsilon_{3z} + \alpha_{31} E_{0x}^{-2} + \alpha_{32} E_{0x}^2) \sin(q_2 d) = \beta \epsilon_2 [E_{dx} - E_{0x} \cos(q_2 d)] \quad (17)$$

$$q_2 E_{dz}^+ (\epsilon_{1z} + \alpha_{11} E_{dz}^{+2} + \alpha_{12} E_{dx}^2) \sin(q_2 d) = \beta \epsilon_2 [E_{dx} \cos(q_2 d) - E_{0x}] \quad (18)$$

以及与(11)式类似的

$$\begin{aligned} & k_0^2 E_{0z}^{-2} (\varepsilon_{3z} + \alpha_{31} E_{0z}^{-2} + \alpha_{32} E_{0z}^2)^2 \\ &= \beta^2 (\varepsilon_{3z} E_{0z}^{-2} + \frac{3}{2} \alpha_{31} E_{0z}^{-4} + \alpha_{32} E_{0z}^2 E_{0z}^{-2} - \varepsilon_{3z} E_{0z}^2 - \frac{1}{2} \alpha_{31} E_{0z}^4), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & k_0^2 E_{dz}^{+2} (\varepsilon_{1z} + \alpha_{11} E_{dz}^{+2} + \alpha_{12} E_{dz}^2)^2 \\ &= \beta^2 (\varepsilon_{1z} E_{dz}^{+2} + \frac{3}{2} \alpha_{11} E_{dz}^{+4} + \alpha_{12} E_{dz}^2 E_{dz}^{+2} - \varepsilon_{1z} E_{dz}^2 - \frac{1}{2} \alpha_{11} E_{dz}^4), \end{aligned} \quad (20)$$

(17)~(20)式联立就是复盖层和衬底均为非线性介质情况的色散方程. 同样, 这里有 4 个方程 5 个未知数, 给定  $E_{dz}$ ,  $E_{dz}^+$ ,  $E_{0z}$  和  $E_{0z}^-$  四个边界值中任意一个, 由色散方程组可求出另外三个边界值和  $\beta$ . 由此, 可得到  $\beta$  与传输功率的关系曲线.

当  $k_0^2 \varepsilon_2 < \beta^2$  时,  $q_2 = (\beta^2 - k_0^2 \varepsilon_2)^{1/2}$ , (19) 式和 (20) 式不变, (17) 式和 (18) 式等号右边为负号, 并且  $\cos$  改为  $\text{ch}$ ,  $\sin$  改为  $\text{sh}$ .

### 3 讨论与数值计算结果

本文推导了三层非线性平面光波导精确的色散方程, 它是电场边界值的多项式代数方程组, 虽然不很复杂但仍须用数值方法求解. 本文方法的优点是: 求解传播常数可以不必先知道非线性层中的电场分布. 从色散方程还可以看出, 传播常数  $\beta$  不仅与波导参数有关, 而且与光场的边界值也就是光功率有关, 这是与线性平面光波导不同的.

下面举一个计算实例, 在图 1 所示结构中, 设薄膜线性介电常数  $\varepsilon_2 = 2.4649$ , 厚度  $d = 0.644 \mu\text{m}$ ; 复盖层和衬底为液晶 MBBA 非线性材料,  $\varepsilon_{1z} = \varepsilon_{1x} = \varepsilon_{3z} = \varepsilon_{3x} = 2.4025$ ,  $\alpha_{11} = \alpha_{31} = \alpha_{12} = \alpha_{32} = 6.37864 \times 10^{-12} \text{m}^2/\text{V}^2$ , 波长  $\lambda = 0.515 \mu\text{m}$ . 在 IBM-PC 机上用 MCAD 软件求解色散方程(8)(或者(8'))和(11)两式, 得到  $\text{TM}_0$  模传播常数  $\beta$  与电场边界值的关系. 接着用龙格-库塔法求解微分方程(4a)和(4b), 处得到非线性层中的电场分布, 再进一步求得传输的光功率.  $\text{TM}_0$  模光功率与有效折射率  $\beta/k_0$  的关系曲线示于图 2, 与有限元法计算结果完全一致(参看文献[3]中图 6).

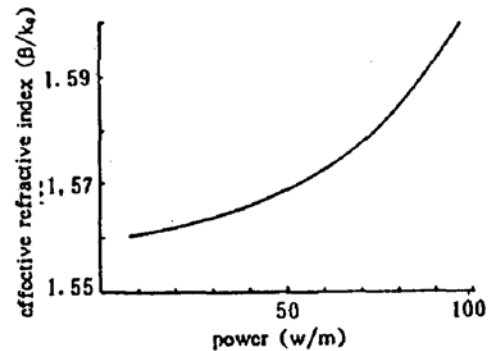


Fig. 2 Dependence of effective refractive index  $\beta/k_0$  on total optical power for  $\text{TM}_0$  mode

### 参 考 文 献

- [1] C. T. Seaton, J. D. Valera, R. L. Shoemaker *et al.*, Calculations of nonlinear TE waves guided by thin dielectric films bounded by nonlinear media. *IEEE J. Q. E.*, 1985, **QE-21**(7): 774~783
- [2] C. T. Seaton, J. D. Valera, B. Svenson *et al.*, Comparison of solutions for TM-polarized nonlinear guided waves. *Opt. Lett.*, 1985, **10**(3): 149~150
- [3] K. Hayata, M. Nagai, M. Koshiba, Finite-element formalism for nonlinear slab-guided waves. *IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques*, 1988, **MTT-36**(7): 1207~1215
- [4] D. Mihalache, G. I. Stegeman, C. T. Seaton *et al.*, Exact dispersion relations for transverse magnetic polarized guided waves at a nonlinear interface. *Opt. Lett.*, 1987, **12**(3): 187~189

## Exact dispersion relation for TM waves guided by nonlinear three-layer planar waveguide

WANG Zihua    CHEN Qin

(Wave Science Laboratory, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

(Received 4 September 1992; revised 14 December 1992)

### Abstract

Exact dispersion relations for TM waves guided by thin dielectric films covered on one or two sides media of intensity-dependent refractive indexes have been derived. Numerical results for symmetric structure are in good agreement with that obtained by the finite element method.

**Key words** nonlinear planar optical waveguide, dispersion relation.

(上接 882 页)

光计算机,如今他们正在对它发动强大的冲刺;在生物医学会段中,与会者特别感兴趣于一种辐射与物质相互作用的量子效应——生物超弱发光,它是自然界的一种普遍现象,对它的研究可能被期待与生命体有广泛的应用前景;另一诱人的议题是光子扫描隧道显微镜,报告人指出,它从诞生到现在仅仅 5 年,目前,空间分辨率已达到横向 nm 量级,纵向小于 1 nm. 相信,人类有可能利用光子扫描隧道显微镜作为手术刀,用以观察和改造脱氧核糖核酸(DNA)的日子不会很远;最后,人们不会忘记美国 New Focus 公司的张茂德先生给与会代表作了一个热门话题的报告(——如何把光学产品打入市场)时的满座场面,因为这是当前改革开放时代对每位搞开发的科技人员都感到棘手难题.

大会同期还举办了一个小型光学和电光产品展览会,为大会增添了新内容. 与 3 天的学术交流同时,展览会通过促膝的技术磋商,供需的小型交易和协作与加工的意向性协议,为今后进一步相互支持、合作、商洽和贸易提供了机会,使供求双方都得到一定的满意,应该说这是一次较成功的小型展览会.

会议期间还组织海外代表参观上海交通大学、上海复旦大学和中国科学院上海光学精密机械研究所的有关实验室,与科技人员就感兴趣的问题进行了研讨和交谈,受到参观者的赞扬和留下较好的印象.

会议的时间是短暂的,但它促进了世界范围光学界人士的交流与合作、相互了解和信任;友谊是永恒的,人们相聚在一起商讨如何筹备第二届世界光学大会事宜. 愿历届世界光学大会不断进行下去.

(黎 风)