

空间周期相干光照明下的 自成像现象及 Lau 效应

李瑞铭

(天津理工学院自动化系, 天津 300191)

龚正烈

(天津理工学院物理系, 天津 300191)

提 要

借助模糊函数理论分析了空间周期相干光照明产生的自成像现象及 Lau 效应. 理论分析结果表明: 当照明光源满足一定条件时, 会出现自成像现象及 Lau 效应. 根据分析结果讨论了这些现象的可能应用.

关键词 自成像, Lau 效应, 空间周期相干光, 模糊函数

1 引 言

自成像现象是一个非常有趣的现象^[1], 人们最初研究它时, 常考虑非相干光照明情形. 与自成像现象有联系的 Lau 效应^[2]最初是用白光照明. 近些年来, 关于这两个现象的研究被不断深化, 部分相干光照明情形已被一些人在理论和实验上进行了探索. Lohmann 等人揭示了部分相干光场互强度横向和纵向周期性的关系^[3], 非相干光照明光栅将产生光栅状相干函数^[4,5], 在准单色点光源和部分相干光照明下的自成像和 Lau 效应的详细研究已由刘立人完成^[6,7].

具有空间周期相干性的照明光是一种很有用的部分相干光, Ohtsuka 等人对这种光源及其应用做了一系列研究^[8,9]. 这种光源的构成方式较灵活. 本文对在这类光的照明下所产生的自成像现象及 Lau 效应进行了分析, 同时根据分析结果讨论了可能的应用. 分析时采用了模糊函数理论^[10,11]. 为了研究方便, 将忽略光栅和照明的有限面积, 把它们看作无限大.

2 理论分析

首先介绍一下空间周期相干性照明光场. 产生这种光场的光源模型是这样的. 在垂直光轴的平面上有若干互不相干的点光源. 若这个平面正好位于一个透镜的前焦面位置, 则在这个透镜的后焦面上的光场具有空间周期相干性. 如果用 (a_i, b_j) 表示点光源在垂直光轴平面上的二维坐标, 那么透镜后焦面上光场的互强度为^[9]:

$$J(Ax, Ay) = \sum_{k, g} C_{k, g} \exp[-ik(a_k Ax + b_g Ay)/f] \tag{1}$$

这里, $C_{k, g}$ 为坐标为 (a_k, b_g) 的点光源的强度, f 为透镜的焦距, $k = 2\pi/\lambda$ (λ 为所有点光源的平均波长). Ax, Ay 分别为透镜后焦面上横纵坐标差.

2.1 自成像现象

研究的光学系统如图 1 所示, 在垂直于光轴的 η, ζ 平面上有若干互不相干的点源, 透镜 L 的焦距为 f , 光栅 G 位于透镜的后焦面上, 光栅栅线与 y 轴的夹角为 θ , 根据上面所述, 在光栅所在平面上, 光场的互强度如(1)式所示. 下面将研究光栅后面特定位置衍射光场的强度分布, 按照模糊函数理论, (1)式可按式转换成对应的模糊函数:

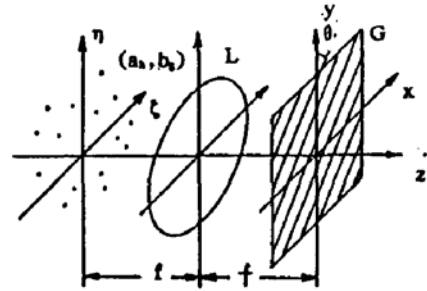


Fig. 1 Schematic diagram of optical system

$$A(Av_x, Av_y, Ax, Ay) = \iint J(Ax, Ay) \exp[-i2\pi(xAv_x + yAv_y)] dx dy \tag{2}$$

其中 Av_x 和 Av_y 分别为 x 和 y 方向的空间频率差, 将(1)式或代入(2)式, 可以得到光栅入射光场的模糊函数 $A_1(Av_x, Av_y, Ax, Ay)$:

$$A_1(Av_x, Av_y, Ax, Ay) = \sum_{k, g} C_{k, g} \exp[-ik(a_k Ax + b_g Ay)/f] \delta(Av_x) \delta(Av_y) \tag{3}$$

图 1 中的光栅 G 是 Ronchi 光栅, 它可以表示为:

$$G(x, y) = \sum_n H_n \exp[i2\pi n(x \cos \theta + y \sin \theta)/d] \tag{4}$$

式中 d 为光栅周期, $H_n = 1/2 \sin C(n/2)$. 与这一光栅对应的模糊函数为

$$A_G(Av_x, Av_y, Ax, Ay) = \sum_n \sum_m H_n H_m \exp[i2\pi(n + m)(Ax \cos \theta + Ay \sin \theta)/2d] \times \delta[Av_x - (n - m) \cos \theta/d] \delta[Av_y - (n - m) \sin \theta/d] \tag{5}$$

对于紧靠光栅处的透射光场的模糊函数 $A_2(Av_x, Av_y, Ax, Ay)$, 考虑了(3)式和(5)式得到:

$$A_2(Av_x, Av_y, Ax, Ay) = \sum_{k, g} \sum_n \sum_m C_{k, g} H_n H_m \exp[-ik(a_k Ax + b_g Ay)/f] \times \exp[i2\pi(n + m)(Ax \cos \theta + Ay \sin \theta)/2d] \times \delta[Av_x - (n - m) \cos \theta/d] \delta[Av_y - (n - m) \sin \theta/d] \tag{6}$$

在近轴近似下, 由(6)式可以很容易得到光栅后距光栅为 z 处, 垂直于光轴的平面上光场的模糊函数 $A_3(Av_x, Av_y, Ax, Ay, z)$,

$$A_3(Av_x, Av_y, Ax, Ay, z) = A_2(Av_x, Av_y, Ax - \lambda z Av_x, Ay - \lambda z Av_y), \tag{7}$$

(7)式就是模糊函数在自由空间传播的公式. 为了考察衍射光场的强度分布, 需要把光场的模糊函数转换成光强分布函数, 根据模糊函数理论, 有

$$I(x, y, z) = \iint A(Av_x, Av_y, 0, 0, z) \exp[i2\pi(xAv_x + yAv_y)] dAv_x dAv_y$$

考虑到(6), (7)式和上式, 可以得到光栅后 z 处垂直于光轴的平面上光场的强度分布函数 $I(x, y, z)$:

$$I(x, y, z) = \sum_{k, g} \sum_n \sum_m C_{k, g} H_n H_m \exp[ik\lambda z(n - m)(a_k \cos \theta + b_g \sin \theta)/df] \exp[-i2\pi(n^2 - m^2)\lambda z/2f^2] \exp[i2\pi(n - m)(x \cos \theta + y \sin \theta)/d] \tag{8}$$

为了进一步简化上式, 设: $x_h = 2a_h qd^2/f\lambda$, $y_g = 2b_g qd^2/f\lambda$, $z = z_T = 2qd^2/\lambda$, $q = 1, 2, 3, \dots$. 其中 z 所取值即 Talbot 距离, 从上面的假设可知

$$I(x, y, z) = \sum_{h,g} \sum_n \sum_m C_{hg} H_n H_m \exp\{i2\pi(n-m)[(x+x_h)\cos\theta + (y+y_g)\sin\theta]/d\} \quad (9)$$

当 ζ, η 平面上的每个点光源的坐标满足下列方程时,

$$a_h \cos\theta + b_g \sin\theta = \lambda fs/2dq \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (10)$$

自成像现象可以出现. 这时(9)式简化成

$$I(x, y, z) = \sum_{hg} \sum_n \sum_m C_{hg} H_n H_m \exp[i2\pi(n-m)(x \cos\theta + y \sin\theta)/d] \quad (11)$$

显然, (11)式为光栅像的重合叠加, (9)式为光栅像的不重合叠加, 根据自成像的含义, (11)式所表示的光场强度分布为自成像光场强度分布. 由此可见, 在具有空间周期相干性的光照明下, 要想观察到自成像现象, 产生照明光场的那些点光源应该位于(10)式所表示的那族直线上, 如图 2 所示, 值得一提的是, 这族直线的斜率与光栅栅线的方位角 θ 有关, 也就是说, 当光栅从可以产生自成像现象的某个位置绕光轴转动时, 自成像将消失. 另外, (10)式所表示的直线族还与 q 有关, q 的大小直接影响该族等间距直线的间距, 由此可以得出结论: 如果在某个 Talbot 平面观察到自成像现象, 保持 η, ζ 平面上的点光源不动及光栅方位角 θ 不变, 那么在其它 Talbot 平面上将观察不到自成像现象, 这种情况与相干光照明时的情形不同.

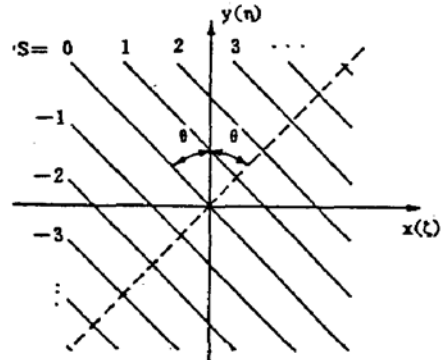


Fig. 2 The necessary location lines (solid lines) of the point sources to be incoherent mutually for giving rise to the self-imaging. The dashed line represents the direction of the grating lines

2.2 Lau 效应

产生 Lau 效应的光学系统如图 3 所示, 在光栅 G_1 后面某个 Talbot 平面上放置一个与 G_1 完全相同的(方位角 θ 也相同)光栅 G_2 , 透镜 L_2 的焦距也与 L_1 的相同, 且放置位置也相似, L_2 后焦面为观察平面.

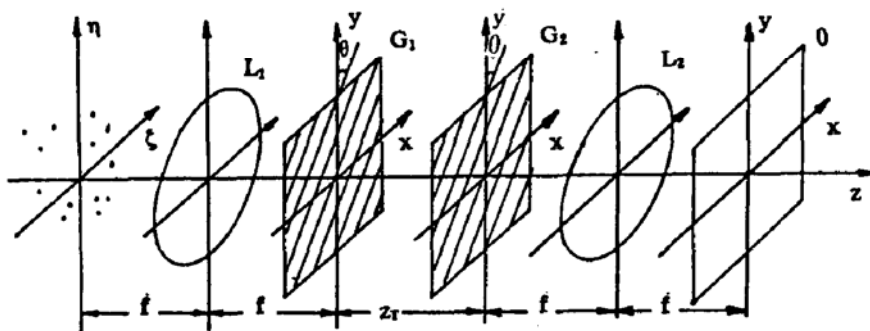


Fig. 3 Schematic diagram of Lau setup

G_2 的数学表达式与 G_1 相同, 对应的模糊函数 $A_{G2}(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta x, \Delta y)$ 可仿照(5)式求出,

$$A_{G2}(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta x, \Delta y) = \sum_l \sum_r H_l H_r \exp[i2\pi(l+r)(\Delta x \cos\theta + \Delta y \sin\theta)/2d] \delta[\Delta v_x - (l-r) \cos\theta/d] \delta[\Delta v_y - (l-r) \sin\theta/d]. \quad (12)$$

同前所述, 从(7)式和(12)式可以得到紧靠 G_2 的透射光场的模糊函数 $A_4(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta x, \Delta y, z_T)$:

$$\begin{aligned}
 A_1(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta x, \Delta y, z_T) = & \sum_{h,g} \sum_n \sum_m \sum_l \sum_r C_{hg} H_n H_m H_l H_r \exp\left(-i \frac{k}{f} \{a_h \right. \\
 & \times [\Delta x - \lambda z_T \Delta v_x + \lambda z_T(l-r) \cos \theta/d] + b_g [\Delta y - \lambda z_T \Delta v_y + \lambda z_T(l-r) \\
 & \times \sin \theta/d]\} \exp\{i2\pi(n+m)[(\Delta x - \lambda z_T \Delta v_x) \cos \theta + (\Delta y - \lambda z_T \\
 & \times \Delta v_y) \sin \theta]/2d\} \exp[i2\pi(l+r)(\Delta x \cos \theta + \Delta y \sin \theta)/2d] \times \delta \\
 & [\Delta v_x - (l+n-m-r) \cos \theta/d] \delta[\Delta v_y - (l+n-m-r) \sin \theta/d] \quad (13)
 \end{aligned}$$

在(13)式中作下列代换就可得到观察平面上光场的模糊函数 $A_0(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta x, \Delta y)^{[12]}$:

$$\begin{cases} \Delta x \rightarrow -\lambda f \Delta v_x \\ \Delta v_x \rightarrow \frac{1}{\lambda f} \Delta x \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta y \rightarrow -\lambda f \Delta v_y \\ \Delta v_y \rightarrow \frac{1}{\lambda f} \Delta y \end{cases}$$

$\therefore A_0(\Delta v_x, \Delta v_y, \Delta x, \Delta y)$

$$\begin{aligned}
 = & \sum_{h,g} \sum_n \sum_m \sum_l \sum_r C_{hg} H_n H_m H_l H_r \exp\left\{-i \frac{k}{f} [a_h (-\lambda f \Delta v_x - (z_T/f) \Delta x + \lambda z_T(l-r) \cos \theta/d) \right. \\
 & + b_g (-\lambda f \Delta v_y - (z_T/f) \Delta y + \lambda z_T(l-r) \sin \theta/d)]\} \exp\{i2\pi(n+m) \\
 & [(-\lambda f \Delta v_x - (z_T/f) \Delta x) \cos \theta + (-\lambda f \Delta v_y - (z_T/f) \Delta y) \sin \theta]/2d\} \\
 & \exp\{i2\pi(l+r)(-\lambda f \Delta v_x \cos \theta - \lambda f \Delta v_y \sin \theta)/2d\} \\
 & \times \delta\left(\frac{\Delta x}{\lambda f} - (l+n-r-m) \cos \theta/d\right) \delta\left(\frac{\Delta y}{\lambda f} - (l+n-r-m) \sin \theta/d\right) \quad (14)
 \end{aligned}$$

按照前面做法,这时通过(14)式可求出观察平面上的光强分布函数,为了使分析结果更为直观,将(14)式所表示的一般情形进行简化,即仅考虑一维点光源情形(令 $b_g = 0$),同时设光栅 G_1 和 G_2 的方位角 θ 为零,这一简化并不影响光场分布的基本特征.按前面的公式可求出观察平面上的光强分布 $I_0(x, y)$

$$\begin{aligned}
 I_0(x, y) = & \sum_n \sum_m \sum_l \sum_r C_{hg} H_n H_m H_l H_r \delta[(l+n-r-m)/d] \exp[\\
 & -i2\pi z_T a_h (l-r)/fd] \delta[x - a_h + (n+m+l+r)\lambda f/2d] \delta(y). \quad (15)
 \end{aligned}$$

(15)式表明:在观察平面 O 的 x 轴上,分布着以 a_h 为中心以 $(\lambda f)/(2d)$ 为间距的一些亮点,也即, ζ, η 平面上每个点光源在平面 O 上产生一个光点阵列,相邻两光点间距为 $(\lambda f)/(2d)$. 对于本文所研究的一维点光源分布情形,若相邻的点光源间距为 $(\lambda f)/(2d)$ 的整数倍,则每个点光源所产生的光点阵列(在平面 O 上)将重合,然而,这正好是(10)式所要求的点光源坐标,应注意,(10)式中当 q 值较大时, s 应对应取较大值. 反之,若点光源之间的间距不是 $(\lambda f)/(2d)$ 的整数倍时,将导致光点阵列的错位.

3 应用讨论

以上所研究的自成像现象及 Lau 效应与相干光照明所产生的自成像现象和扩展白光光源照明所产生的 Lau 效应有一些不同之处,自成像和 Lau 效应的应用已有相当多的报道,这里所做的研究也可以找到相应的应用.

自成像现象在三维形状或深度测量中可以找到应用^[13,14],采用周期较小的光栅,可以提高测量分辨率,但是,用相干光照明所产生的光栅像具有纵向周期性,测量只能在非模糊范围内进行,周期小的光栅对应的非模糊范围小. 如果被测物(沿测量方向)的尺寸大于非模糊范围,

用相干光照明会得到错误的测量结果. 前面的分析表明, 当点光源在 ζ, η 平面上按一定条件分布时, 只能在某个 Talbot 平面上观察到自成像现象, 如果用这个平面作为参考平面, 用微计算机控制的机械移动方式扫描(或移动)被测物, 被测物的表面位于参考平面时, 可观测到光栅像, 通过记录这时的移动量, 就可以得到被测物的外形尺寸. 这种方法特别适合于阶梯型被测物. 另外, 这种方法在原理上没有测量模糊问题.

光互连技术是目前广泛研究的一种技术, 各种各样的方案不断被提出. 最近有人提出了采用 Dammann 光栅及透镜构成的总线系统^[15]. 本文所研究的 Lau 效应装置也可以作为一种总线系统, 假设图 3 中有一列发不同波长光的单色点光源位于 ζ, η 平面上, 按照前面分析的情形(以 $q=1$ 为例), 在观察平面 O 上每个 a_n 位置处, 放一根单模光导纤维接收光信号, 则每根光导纤维可以接收所有点光源发出的光, 从而完成总线信号传输任务. 这样构成的系统的照明点光源也可用正方形阵列形式.

4 结束语

本文分析了空间周期性相干光照明下所产生的自成像现象及 Lau 效应, 分析结果表明: 当照明光源满足一定条件时, 1) 自成像现象会出现, 这时光强分布以各个点光源所产生的光栅像重合叠加的形式出现, 2) Lau 效应的光强分布以各以各个点光源所产生的等间距点阵列重合叠加的形式出现. 根据分析结果, 提出了可能的应用. 当然, 这些应用是否可行, 有待实验的验证.

参 考 文 献

- [1] F. Talbot, Facts relating to optical science No. Iv, *Phil. Mag.*, 1836, **9**:401~407
- [2] E. Lau, Beugungerscheinungen an doppelrastern, *Ann. Phys.*, 1948, **6**:417~423
- [3] A. W. Lohmann, J. Ojeda Castaneda, Spatial periodicities in partial coherent field, *Opt. Acta*, 1983, **30**(4):475~479
- [4] F. Gori, Lau effect and coherence theory, *Opt. Commun.*, 1979, **31**(1):4~8
- [5] R. Sudol, R. J. Thompson, Lau effect: theory and experiment, *Appl. Opt.*, 1981, **20**(6):1107~1116
- [6] 刘立人, 模糊函数和任何光学系统中的 Talbot-Lau 效应, *光学学报*, 1987, **7**(6):501~510
- [7] L. Liu, Partially coherent diffraction effect between Lau and Talbot effects, *J. O. S. A.*, 1988, **A5**(10):1709~1716
- [8] Y. Imai, Y. Ohtsuka, Edge imaging with mutually incoherent point sources, *Opt. Acta*, 1985, **32**(4):423~432
- [9] Y. Imai, Y. Ohtsuka, Source of light with spatially periodic coherence and its uses in image addition and subtraction, *J. O. S. A.*, 1986, **A3**(6):1263~1267
- [10] A. Papoulis, Ambiguity function in Fourier optics, *J. O. S. A.*, 1974, **64**(4):779~788
- [11] K. H. Brenner, J. Ojeda-Castaneda, Ambiguity function and Wigner distribution function applied to partial coherence, *Opt. Acta*, 1984, **31**(2):213~225
- [12] 屠锦洪, 詹黎, 部分相干光照明下旋转双光栅衍射干涉效应, *物理学报*, 1991, **40**(9):1424~1434
- [13] P. Chavel, T. C. Strand, Range measurement using Talbot diffraction imaging of gratings, *Appl. Opt.*, 1984, **23**(6):862~868
- [14] A. M. Andreyev, v. M. Ginzburg, N. M. Ramishvili, The use of the Talbot effect in dynamic measurements of deformed liquid/gas interface surface shape, *Opt. Commun.*, 1989, **73**(6):429~433

- [15] U. Krackhardt, F. Souer, W. Stork *et al.*, Concept for an optical bus-type interconnection network, *Appl. Opt.*, 1992, **31**(11):1730~1734

Self-imaging phenomenon and Lau effect under the illumination of spatially periodic coherent light

LI Ruiming

(*Department of Automation Engineering, Tianjin Institute of Technology, Tianjin 300191*)

GONG Zhenglie

(*Department of Physics, Tianjin Institute of Technology, Tianjin 300191*)

(Received 5 August 1992; revised 9 November 1992)

Abstract

The self-imaging phenomenon and Lau effect under the illumination of spatially periodic coherent light are analyzed by means of ambiguity function theory. Theoretical results show that the self-imaging phenomenon and Lau effect may occur when the illumination sources satisfy a certain condition. The possible applications of these phenomena are discussed according to the analysis results.

Key words self-imaging, Lau effect, light with spatially periodic coherence, ambiguity function.