

# 体光栅耦合波理论中的能量平衡

鄂国铤

(北京工业大学应用物理系, 北京 100022)

## 提 要

基于对体光栅衍射效率的计算分析, 本文直接地、精细地讨论了体光栅的功率守恒问题。结果指出: 弱耦合前提假定下的双波耦合波二阶理论, 不能严格地满足能量平衡准则。

关键词 体光栅, 弱耦合。

## 1 前 言

对于体光栅而言, 至今还没有得到一个简明的、一般的、准确的耦合波方程的分析解, 所以, 早在 1969 年 Kogelnik 提出的双波耦合的一阶理论, 现在仍然有重要的意义和价值, 其中的能量平衡关系式及衍射效率的曲线, 更是引人入胜<sup>[1]</sup>; 1977 年 Kong 用模式理论又证明了双波耦合的二阶理论, 也满足能量平衡的准则<sup>[2]</sup>; 1981 年 Maharam 和 Gaylord 提出了多波耦合的数值解法<sup>[3]</sup>, 随后于 1983 年这两位作者又断言: 所有处理体光栅的耦合波理论, 都能满足能量平衡准则<sup>[4]</sup>。但是, 对于这个论点, 1984 年 Russel 提出了质疑, 他用 Poynting 矢量论证了: 所有实用的耦合波理论, 都是有限个波的耦合波理论, 即所谓截断的耦合波理论, 这个理论绝不能严格地满足能量平衡准则<sup>[5]</sup>; 然而, 1985 年 Maharam 和 Gaylord 在他们集四百余篇文献所作的综合评述中, 却对能量平衡问题没有再展开讨论<sup>[6]</sup>。

本文先求解出双波耦合二阶微分方程的普遍完整解, 然后特别引入一个表征耦合强弱的参数, 进而对上述问题作全面的分析和简要的评述。

## 2 双波耦合二阶理论的完整解

如图 1 所示三维光栅,  $K$  为光栅矢量,  $|K| = 2\pi/\Lambda$ , 而  $\Lambda$  为光栅周期; 假设入射波非常接近满足布喇格(Bragg)条件

$$\sigma = \rho - K, \quad (1)$$

式中  $\rho$ 、 $\sigma$  分别为入射波  $R$  和衍射波  $S$  的波矢。故可将光栅中的电场近似地按双波耦合写成

$$E(z) = R(z)\exp(-i\rho \cdot r) + S(z)\exp(-i\sigma \cdot r). \quad (2)$$

这里已取入射波和衍射波皆为垂直于  $xz$  平面的线偏振, 于是问题就归结为求解标量波动方程

$$\nabla^2 E + q^2 E = 0 \quad (3)$$

$$q^2 = (\omega/c)^2 \epsilon + i\omega\mu\sigma, \quad \epsilon = \epsilon_0 + \epsilon_1 \cos(k \cdot r), \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(k \cdot r),$$

式中  $\epsilon$  和  $\sigma$  分别为光栅介质的介电常数和电导率, 再引入平均传播常数  $\beta$ , 平均吸收系数  $\alpha_0$ , 耦

合常数  $k$ , 即

$$\left. \begin{aligned} \beta &= (2\pi \sqrt{\varepsilon_0}/\lambda), & \alpha_0 &= (\mu c \sigma_0/2 \sqrt{\varepsilon_0}), \\ k &= \frac{1}{4} \left( \frac{2\pi \varepsilon_1}{\lambda \sqrt{\varepsilon_0}} - i \frac{\mu c \sigma_1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \right) = \frac{\pi n_1}{\lambda} - i \frac{\alpha_1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

于是有  $q^2 = \beta^2 - 2i\alpha_0\beta + 2k\beta[\exp(ik \cdot r) + \exp(-ik \cdot r)]$ , (5)  
且由图 1 及(1)式可知有

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \begin{bmatrix} \rho_x \\ 0 \\ \rho_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \\ \sigma &= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \sin\theta - (k/\beta)\sin\varphi \\ 0 \\ \cos\theta - (k/\beta)\cos\varphi \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

当严格满足布喇格条件时应有

$$\rho^2 = \beta^2 = \sigma^2, \quad \cos(\varphi - \theta) = (K/2\beta). \quad (7)$$

当偏离布喇格条件时应有

$$\rho^2 = \beta^2 \neq \sigma^2, \quad \zeta = (\beta^2 - \sigma^2)/2\beta \neq 0. \quad (8)$$

将(2)式代入(3)式后,再考虑到(4)~(6),(8)式可得出

$$\left. \begin{aligned} R' - 2iR'\rho_z - 2i\alpha_0\beta R + 2k\beta S &= 0, \\ S' - 2iS\sigma_z - 2i\alpha_0\beta S + 2\beta\zeta S + 2k\beta R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

取  $K$  平行体光栅表面,且在此限定讨论透射型光栅,此时有下式

$$\varphi = (\pi/2), \quad \rho_z = \sigma_z = k_z. \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式并消去  $R$ ,可得到关于  $S$  的四阶线性奇次常系数微分方程

$$S'''' - 4ik_z S'' - 2(2i\alpha_0\beta + 2k_z^2 - \beta\zeta)S' - 4\beta k_z(2\alpha_0 + \zeta)S' - 4\beta^2(\alpha_0^2 + i\alpha_1\zeta + k_z^2)S = 0 \quad (11)$$

与(11)式相应的特征方程有四个特征根为

$$\left. \begin{aligned} P_{1,2} &= i(k_z \pm \sqrt{k_z^2 - y_1}), \quad P_{3,4} = i(k_z \pm \sqrt{k_z^2 - y_2}), \\ y_{1,2} &= 2i\alpha_0\beta - \beta\zeta \pm \beta \sqrt{\zeta^2 + 4k_z^2}, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

于是方程(11)的通解为

$$S(z) = C_1 \exp(P_1 z) + C_2 \exp(P_2 z) + C_3 \exp(P_3 z) + C_4 \exp(P_4 z), \quad (13)$$

为了确定  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , 对透射型光栅取如下边界条件

$$\left. \begin{aligned} S(0) &= 0, \quad S'(0) = 0, \\ R(0) &= A, \quad R'(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

将(14)式代入(13)式,并利用(9)式,可得到四元一次代数方程组,求出四个系数.将求得的四个系数值代入(13)式并使用(12)式,最终可得(11)式的解为

$$\left. \begin{aligned} S(z) &= \frac{A}{2(y_2 - y_1)} \exp(ik_z z) \left[ \frac{k_z - W_1}{W_1} \exp(iW_1 z) - \frac{k_z + W_1}{W_1} \exp(-iW_1 z) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_z - W_2}{W_2} \exp(iW_2 z) + \frac{k_z + W_2}{W_2} \exp(-iW_2 z) \right], \\ W_1 &= \sqrt{k_z^2 - y_1}, \quad W_2 = \sqrt{k_z^2 - y_2}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

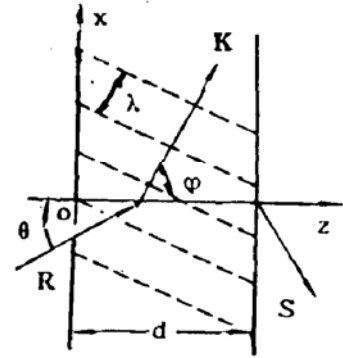


Fig. 1 Model of volume gratings with slanted fringes

(15)式就是无倾斜透射型光栅的衍射波复振幅  $S(z)$  的二阶普遍完整解. 这个解包括了位相型、振幅型、混合型、有损耗、无损耗、满足及偏离布喇条件的各种情况.

### 3 表征耦合强弱的参数

#### 3.1 弱耦合(小调制)条件

由 Kogelnik 理论的基本假设<sup>[1]</sup>

$$(2\pi n/\lambda) \gg \alpha_0, \quad (2\pi n/\lambda) \gg \alpha_1, \quad n \gg n_1. \quad (16)$$

上式显然等价于下式

$$k_z \gg \alpha_0, \quad k_z \gg \alpha_1, \quad \varepsilon_0 \gg \varepsilon_1. \quad (17)$$

又当非常接近满足布喇格条件时,按(8)式和(10)式还应当有下式

$$k_z \gg \zeta. \quad (18)$$

将(17)、(18)二式代入(12)式后,可知应有下式

$$k_z^2 \gg y_{1,2}. \quad (19)$$

于是(15)式中的指数项前面的系数可取如下近似

$$(k_z - W_{1,2})/W_{1,2} \doteq 0, \quad (k_z + W_{1,2})/W_{1,2} \doteq 2. \quad (20)$$

但是对(15)式的指数项当中的  $W_{1,2}$  却应取如下近似

$$W_{1,2} = \sqrt{k_z^2 - y_{1,2}} \doteq k_z - (y_{1,2}/2k_z), \quad (21)$$

称(21)式为级数展开的一级近似.

将(20)、(21),两式代入(15)式并使用(12)式,可导出

$$S(z) = \frac{-iA}{\sqrt{1 - (\zeta^2/4k^2)}} \exp\left(-i \frac{\beta\zeta}{k_z}\right) \exp\left(\frac{\alpha_0\beta}{k_z}\right) \sin\left(\frac{\beta z}{2k_z} \sqrt{\zeta^2 + 4k^2}\right). \quad (22)$$

其中  $A$  为复常数. 显然,(22)式与文献[1]的(41)式是相同的.

若取无吸收位相光栅的情况,且当入射波  $R$  严格满足布喇条件时,有下式

$$\alpha_0 = \alpha_1 = 0, \quad \beta^2 = \sigma^2, \quad \zeta = 0. \quad (23)$$

将(23)式代入(15)式后就得到

$$\begin{aligned} S(z) = & \frac{A}{4} \exp(ik_z\beta) \left\{ \frac{k_z - \sqrt{k_z^2 - 2k\beta}}{\sqrt{k_z^2 - 2k\beta}} \exp(i \sqrt{k_z^2 - 2k\beta} z) \right. \\ & - \frac{k_z + \sqrt{k_z^2 - 2k\beta}}{\sqrt{k_z^2 - 2k\beta}} \exp(-i \sqrt{k_z^2 - 2k\beta} z) - \frac{k_z - \sqrt{k_z^2 + 2k\beta}}{\sqrt{k_z^2 + 2k\beta}} \exp(i \sqrt{k_z^2 + 2k\beta} z) \\ & \left. + \frac{k_z + \sqrt{k_z^2 + 2k\beta}}{\sqrt{k_z^2 + 2k\beta}} \exp(-i \sqrt{k_z^2 + 2k\beta} z) \right\} \quad (24) \end{aligned}$$

对(24)式按照类似(20)、(21)式的原则取近似,或者直接将(23)式代入(22)式,均可得到下式

$$S(z) = -iA \sin\left(\frac{k\beta}{k_z} z\right) \quad (25)$$

其中(22)、(24)、(25)式中的  $A$  来源于边界条件(14)式. 显然,(25)式与文献[1]的(45)式是完全相同的. 简言之,当满足弱耦合条件(16)式时,二阶完整解(15)式和与其相应的最重要最常用的特例(24)式,就分别退化为 Kogelnik 的一阶解(22)式和(25)式.

以上推证,尽管是合理的有意义的,但毕竟是粗糙的,因为(16)式本身根本就没有一个定量的界限划分. 只能说明:文献[1]在(16)式的条件下,作为近似处理,略去(9)式中的  $R''$  和  $S''$

从而简化成为一阶方程,是有根据的、可行的.然而正是由于这种近似,Kogelnik 才导出了能量平衡关系式,即文献[1]的(24)式如下

$$(C_k RR^* + C_s SS^*)' + 2\alpha_0(RR^* + SS^*) + i(k-k^*)(RS^* + R^*S) = 0 \quad (26)$$

其中  $C_k = \rho_z \beta^1$ ;  $C_s = \sigma_z \beta^1$ . 但是,如果保留  $R^*$  和  $S^*$  并直接由(9)式出发,如何推导出相应的能量平衡关系式,却至今未见文献报道.

### 3.2 精细分析

引入如下参数,令

$$m = (k\beta/k_z^2) = (\varepsilon_1/4\varepsilon_0 \cos^2\theta) \propto (\varepsilon_1/\varepsilon_0) = (n_1/n), \quad x = k_z z. \quad (27)$$

将(27)式分别代入(25)式和(24)式后,就得到:对无倾斜无吸收位相光栅而言,当入射波  $R$  严格满足布喇格条件时,衍射波  $S$  的一阶解和二阶解随  $m$  和  $x$  变化的表达式为

$$\text{一阶解: } \eta_1(m, x) = (SS^*/A^2) = \sin^2(mx), \quad (28)$$

$$\text{二阶解: } \eta_2(m, x) = (SS^*/A^2)$$

$$= \frac{1}{4} \left\{ [\cos(\sqrt{1+2m}x) - \cos(\sqrt{1-2m}x)]^2 \left[ \frac{\sin(\sqrt{1-2m}x)}{\sqrt{1-2m}} - \frac{\sin(\sqrt{1+2m}x)}{\sqrt{1+2m}} \right]^2 \right\} \quad (29)$$

按(27)式可知: $m$  和  $x$  皆为无量纲数,很明显, $m$  取值的大小表示纯位相介质光栅相对调制的大小,确实  $m$  参数能够恰当地、定量地表征双波之间的耦合强弱;而  $x$  的取值大小直接与光栅厚度相联系.

分别取定  $m = 0.1, m = 0.2$  和  $m = 0.3$ ,再分别使用(28)、(29)两式,就可计算出衍射效率  $\eta$  随  $x$  而变化的曲线,共六条曲线.其中纵坐标取相同比例,横坐标取不同比例.见图 2.

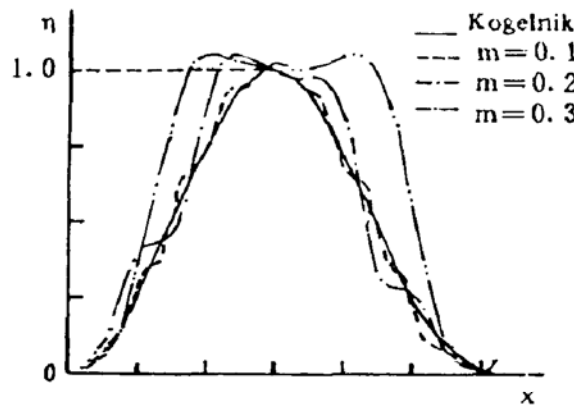


Fig. 2 The diffraction efficiency as a function of  $m$  and  $x$

尽管二阶解的曲线没有一阶解的曲线来得光滑,并且确实存在偏离,但是随着  $m$  数的减小,亦即当耦合越来越弱时,它总是与一阶解的曲线紧密相依,围绕其摆动,偏离越来越小,亦即二阶解就退化为一阶解.再次说明:在(16)式弱耦合条件下,作为近似处理,(9)式中的  $R^*$  和  $S^*$  两项可以略去.

严格地讲,可以预期,只有当  $m \rightarrow 0$  时,二阶解的曲线才能与一阶解的曲线完全吻合.当然,按照  $m$  的定义(27)式,又必需限定  $m$  不能取零值.

要强调指出:只要  $m \neq 0$ ,二阶解曲线的最大值就不等于 1,而是略大于 1,图中当  $m = 0.3$  时已相当严重, $m = 0.2$  时已很明显, $m = 0.1$  时已清楚可见,若  $m$  取值再小则依然存在这种异常,即总会出现  $\eta > 1$  的情况,它表明:双波耦合的二阶理论不能严格遵守能量平衡准则.

## 4 讨论

1) 虽然文献〔1〕给出的能量平衡关系式即本文的(26)式和衍射效率曲线即本文的(28)式,被广泛引用,然而正是作者 Kogelnik 首先非常明确地、强调地指出,他的一阶理论的近似性及弱耦合前提假定的必要性<sup>〔1〕</sup>,另外,Russel 早在 1981 年所做的综合评述中,也指明了这一点<sup>〔8〕</sup>,本文进一步、更清楚地阐明了弱耦合前提假定(16)式是绝对必不可少的,同时也论证了文献〔1〕是本文的近似处理.

2) 虽然文献〔1〕、〔2〕在推导能量平衡关系的解析表述时,为了严格,都是由波动方程出发;但是文献〔7〕不去求解波动方程,只用薄光栅的振幅传输理论,在弱耦合的假定前提下,也推导出了能量平衡关系,再利用同样的条件也能得出本文的(26)、(28)两式.然而却不能因此就断言:双波耦合波理论是严格满足能量平衡准则的,因为弱耦合这个假定本身带有任意性,正是它掩盖了该理论对能量平衡准则的偏离,只有引入上述  $m$  参数以后,才能揭示出其近似性.

3) 虽然从分析方法上讲,文献〔2〕与文献〔1〕相比确实有特色、有意义、有价值,也在小调制的前提下,对双波耦合的二阶理论,间接地给出了能量平衡关系的解析表述;但是文献〔2〕的结论,却是本文的分析所绝对不能容纳的,即 Kong 认为:当满足布喇格条件时,在所有调制强度下,都能满足能量平衡准则.因为本文图 2 的曲线正是在这个条件下计算得出的.另外与文献〔2〕相比,本文的分析方法,显然更为直接和精细.

4) 无疑,文献〔5〕对文献〔4〕的质疑和断论是有本质意义的.其实,耦合波理论认为光栅内部的波场结构可用傅里叶级数表示,是无限个平面波的组合,而实用的耦合波理论,却只能取有限个波的组合,此外不同衍射阶次之间的干涉也没有考虑进去,从而这个理论本身就存在着不协调,再引入其它假定后作近似处理,最终必将导致对能量平衡准则的偏离.当耦合稍强时,由输入波所激发的无限多个衍射波之间,都要通过光栅互相交换耦合能量,还要互相干涉.尽管满足布喇格条件的衍射光束占优势,但其它阶次衍射光束的贡献及其相互间的干涉,也都已经大到不可忽略的程度,若仍然只用有限个波或双波耦合来描述其物理过程,则势必将导致如图 2 所示.衍射效率的最大值略大于 1.

5) 本文由二阶完整解出发,从一个最重要最常用的例证入手,引入  $m$  参数做分析计算,从而为文献〔5〕提供了一个佐证,得到了完全相同的结论,完全支持 Russel 的论断.显然,本文的分析方法更为直观、简捷和一目了然.

## 5 结束语

在一个理论的解析表述中,推证其究竟是如何满足热力学第一定律的,这一点至关重要,文献〔1〕和〔7〕都已作了这种推证;但是另一方面,分析一个理论的物理基础是否健全和物理模型所存在的不足,至少是同等重要的,文献〔5〕和本文又作了这种分析.然而,一个理论的价值,毕竟总是按照它在自身的近似范围内,满足热力学第一定律的程度,以及在实用中的有效性和可行性而定的.事实上,按图 2 作估算:由于只取双波耦合及忽略了干涉,将导致衍射效率的计算值偏高,当  $m = 0.3$  时,偏高不超过 10%.当  $m = 0.1$  时,偏高约为 5%.

## 参 考 文 献

- [1] H. Kogelnik, Coupled wave theory for thick gratings. *B. S. T. J.*, 1969, **48**(9): 2909~2947
- [2] J. A. Kong, Second-order coupled-mode equations for spatially periodic media. *J. O. S. A.*, 1977, **67**(6): 825~829
- [3] M. C. Moharam, T. K. Gaylord, Rigorous coupled-wave analysis of planar-grating diffraction. *J. O. S. A.*, 1981, **171**(7): 811~818
- [4] M. G. Moharam, T. K. Gaylord, Comments on analysis of reflection gratings. *J. O. S. A.*, 1983, **173**(3): 399~401
- [5] P. St. J. Russell, Power conservation and field structures in uniform dielectric gratings. *J. O. S. A.*, 1984, **11**(3): 293~299
- [6] M. G. Moharam, T. K. Gaylord, Analysis and applications of optical diffraction by gratings. *Proc. IEEE*, 1985, **173**(5): 894~937
- [7] 鄂国铤, 薄光栅振幅传输理论的开拓. *光学学报*, 1990, **10**(9): 803~809
- [8] P. St. J. Russel. Optical volume holography. *Phys. Reports*. 1981, **171**(4): 209~312

## Energy balance about coupled-wave theory for volume gratings

E Guoguang

(Department of Applied Physics, Beijing Polytechnic University, Beijing 100022)

(Received 7 June 1991; revised 28 February 1992)

## Abstract

In this paper a direct and minute discussion is given of power conservation for volume gratings, based on the calculation of diffraction efficiency. It is shown that two-wave coupled-wave theory do not rigorously conserve power under the weak-coupling assumption.

**Key words** volume gratings, weak-coupling.