

非线性锥形梯度折射率棒透镜的成像特性

陈智浩 蔡声镇 何志贤

(福建师范大学物理系, 福州 350007)

提 要

根据变分法和 ABCD 定律, 导出了非线性锥形梯度折射率棒透镜中高斯光束的成像公式. 结果表明, 这种透镜的成像特性与光线轨迹依赖于光功率. 当 $n_2 = 0$ (n_2 : 非线性系数) 以及几何光学近似下, 成像公式就简化为已知的结果.

关键词 成像特性, 高斯光束, 梯度折射分布.

1 引 言

梯度折射率棒透镜, 在激光等领域中具有广阔的应用前景. 随着激光技术、非线性纤维光学以及非线性光学材料的迅速发展, 作者认为有必要研究这种透镜的非线性成像理论. 在强光作用下, 依赖于光强的透镜折射率将发生明显的变化. 另一方面, 具有大的非线性系数的材料不断被发现和制成. 致使低功率也可使透镜的折射率发生明显的变化. 显然, 这种非线性光学效应将影响梯度折射率棒透镜的成像特性. 最近, 作者初步研究了非线性圆柱形梯度折射率棒透镜的光学特性^[1]. 与文献[1]不同, 本文用变分法以及高斯光束在线性介质中传播的 ABCD 定律, 研究高斯光束通过非线性锥形梯度折射率棒透镜的成像特性, 给出了新的重要的结果. 文献[2]和[5]的成像公式是本文的特例.

2 成像公式的推导

非线性锥形梯度折射率棒透镜, 其折射率分布为

$$n^2 = n_0^2(1 - A(z)r^2) + \alpha|E|^2. \quad (1)$$

式中 $A(z) = A_0/(1 + A_1z)^2$, $A_0 = \tilde{A}^2/\rho_0^2$, $A_1 = -m/\rho_0$, $m = tg\theta = (\rho_0 - \rho)/Z$, $\alpha = n_0^2 n_2 c \epsilon_0$. n_0 是透镜中心折射率, E 是场强, ρ_0 和 ρ 分别是锥形大端和小端的半径, Z 是透镜长, \tilde{A}^2 是透镜特性参数, θ 为锥形透镜的半锥角, c 是真空中光速, ϵ_0 是真空中介电常数, n_2 是透镜非线性系数 (单位 m^2/W).

图 1 是高斯光束经过这种透镜的腰-腰变换示意图. 入射高斯光束的束腰半径为 ω_0 , S_0 是其束腰到入射端的距离 (称为物距). 出射高斯光束的束腰半径为 ω_2 , z 是其束腰到出射端的距离 (称为像距). 若出射束腰在非线性介质内部, 则 $z < 0$ 反之 $z > 0$.

在入射高斯光束的束腰处, 其光束参量为^[3]

$$q_0 = i\pi\omega_0^2/\lambda \quad (2)$$

式中 λ 是真空中光波波长. 传输至入射端, 其光束参量变为

$$q'_0 = q_0 + S_0, \quad (3)$$

经入射端界面折射后, 光束参量变为

$$q_1 = n_0 q'_0. \quad (4)$$

在(4)式中设 $A_0 r^2 \ll 1$ (这也符合实际情形), 所以略去 $A_0 r^2$ 项下同. 根据

$$1/q_1 = (1/R_1) - (i\lambda/\pi n_0 \omega_1^2), \quad (5)$$

并把(2)~(4)式代入(5)式, 可以求得

$$R_1 = [n_0^2 S_0^2 + (\pi n_0 \omega_0^2/\lambda)^2]/n_0 S_0, \quad (6)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 [1 + (\lambda S_0/\pi \omega_0^2)^2]. \quad (7)$$

根据 Maxwell 方程, 可以导出高斯光束在透镜中传播, 满足下列方程

$$i \frac{\partial E}{\partial z} = \frac{1}{2k} \left(\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E}{\partial r} \right) - \frac{1}{2} k A r^2 E + \frac{k\alpha}{2n_0^2} |E|^2 E. \quad (8)$$

式中 $k = 2\pi n_0/\lambda$, $\partial^2 E/\partial z^2$ 项已略去. (8)式的变分问题为 $\delta \int L r dr dz = 0$, 其中

$$L = \frac{i}{2} \left[E \frac{\partial E^*}{\partial z} - E^* \frac{\partial E}{\partial z} \right] - \frac{1}{2k} \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 - \frac{1}{2} k A r^2 |E|^2 + \frac{k\alpha}{4n_0^2} |E|^4. \quad (9)$$

设试探解为

$$E(r, z) = \frac{E_0}{\omega(z)} \exp \left[-\frac{r^2}{\omega_1^2 \omega^2(z)} - i \frac{k}{2} \rho(z) r^2 + ik\varphi(z) \right], \quad (10)$$

根据变分原理^[4], 容易求出参数 $\omega(z)$, $\rho(z)$ 和 $\varphi(z)$. 结果为

$$\omega^2(z) = \frac{\rho}{\rho_0} \left\{ \frac{K}{2b^2} + \frac{1}{b} \left(\frac{1}{A_1 R_1} - \frac{1}{2} \right) \sin \left[2b \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left(1 - \frac{K}{2b^2} \right) \cos \left[2b \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right] \right\}, \quad (11)$$

$$\rho(z) = -\frac{m}{\rho_0} \left\{ \frac{\rho_0}{2\rho} + \frac{1}{\omega^2(z)} \left[\left(\frac{1}{A_1 R_1} - \frac{1}{2} \right) \cos \left(2b \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) - b \left(1 - \frac{K}{2b^2} \right) \sin \left(2b \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] \right\}. \quad (12)$$

式中 $b^2 = \tilde{A}^2/m^2 - 0.25$, $B = \lambda^2/\pi^2 n_0^2 \omega_1^4$, $K = (1/A_1 R_1 - 0.5)^2 + B(1 - P/P_c)/A_1^2 + b^2$, $P_c = \lambda^2/2\pi n_0 n_2$, P 是功率. 在上面推导中, 已利用边界条件 $\omega(0) = 1$, $d\omega/dz|_{z=0} = 1/R_1$.

在 $z = Z$ 处, 光束参量为

$$1/q = \rho(Z) - i\lambda/\pi n_0 \omega_1^2 \omega^2(Z). \quad (13)$$

经出射端界面折射后, 输出光束参量为 q/n_0 ^[3]. 显然, 在束腰处, 光束参量则变为 $q/n_0 + \bar{Z}$. 利用束腰条件, 可以求出^[1]

$$\bar{Z} = -\pi^2 n_0 \omega_1^4 \omega^4(Z) \rho(Z) / [\pi^2 n_0^2 \omega_1^4 \omega^4(Z) \rho^2(Z) + \lambda^2] \quad (14)$$

若 $\bar{Z} > 0$, 那么出射光束先聚焦后发散; 若 $\bar{Z} < 0$, 那么出射光束总是发散的. 同样可以求出^[1]

$$\omega_2^2 = \{ \lambda^2 \bar{Z}^2 + \pi^2 \omega_1^4 \omega^4(Z) [1 + n_0 \rho(Z) \bar{Z}]^2 \} / \pi^2 \omega_1^2 \omega^2(Z). \quad (15)$$

可以定义像的线放大率为

$$|M| = \omega_2/\omega_0. \quad (16)$$

若 $|M| > 1$, 那么光束束腰被放大; 反之, 若 $|M| < 1$, 那么光束束腰被缩小. 当

$$\frac{P_{1c}}{P_c} = 1 + \frac{A_1^2}{B} \left[\frac{1}{A_1 R_1} - \frac{1}{2} + b \operatorname{ctg} \left(b \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right]^2 \quad (17)$$

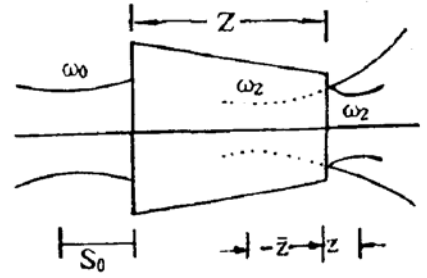


Fig. 1 Transformation of a Gaussian beam through a nonlinear conical GRIN rod lens

时, $\omega_2 = 0$. 此时, 光斑“崩塌”(collapse). 所以上面式子仅在 $P < P_c$ 时才适用.

如果 $n_2 = 0$ 以及 $\lambda \rightarrow 0, \omega_0 \rightarrow 0$ (几何光学近似, 该条件可宽为 $\lambda \rightarrow 0$ 和 $S_0 \gg \pi\omega_0^2/\lambda$), (14)式和(16)式就简化为

$$\bar{z} = \frac{bm\rho}{n_0\bar{A}^2} \frac{\frac{n_0S_0\bar{A}^2}{bm\rho_0} \cos(b\ln \frac{\rho_0}{\rho}) + \left[\frac{n_0S_0\bar{A}^2}{bm\rho_0} \cdot \frac{1}{2b} + \frac{\bar{A}^2}{b^2m^2} \right] \sin(b\ln \frac{\rho_0}{\rho})}{\left[\frac{n_0S_0\bar{A}^2}{bm\rho_0} + \frac{1}{2b} \right] \sin(b\ln \frac{\rho_0}{\rho}) - \cos(b\ln \frac{\rho_0}{\rho})}, \quad (18)$$

$$M = -\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} / \left\{ \left[\frac{n_0S_0\bar{A}^2}{bm\rho_0} + \frac{1}{2b} \right] \sin(b\ln \frac{\rho_0}{\rho}) - \cos(b\ln \frac{\rho_0}{\rho}) \right\} \quad (19)$$

这是文献[2]的结果.

如果 $A_1 \rightarrow 0$, 即锥形变成圆柱形, 那么

$$\begin{aligned} bA_1 &\rightarrow -\sqrt{A_0}, \quad -\frac{m}{\rho_0} \frac{1}{A_1R_1} \rightarrow \frac{1}{R_1}, \\ 2b\ln \frac{\rho}{\rho_0} &\rightarrow -2\sqrt{A_0}Z, \quad -\frac{m}{\rho_0}b \rightarrow -\sqrt{A_0}, \\ \frac{K}{b^2} &\rightarrow 1 + \frac{B}{A_0} \left(1 - \frac{P}{P_c} \right) + \frac{1}{A_0R_1^2} = a_0. \end{aligned}$$

这样(11)式就变成

$$\omega^2 = \frac{2-a_0}{2} \cos(2\sqrt{A_0}Z) + \frac{1}{\sqrt{A_0}R_1} \sin(2\sqrt{A_0}Z) + \frac{a_0}{2} \quad (20)$$

同样, (12)式则变为

$$\rho(z) = \frac{\sqrt{A_0}}{\omega^2} \left[\frac{1}{\sqrt{A_0}R_1} \cos(2\sqrt{A_0}Z) - \frac{2-a_0}{2} \sin(2\sqrt{A_0}Z) \right] \quad (21)$$

在(20)、(21)式是文献[5]的结果, 如果 $R_1 \rightarrow \infty$, 那么(20)式和(21)式就退化为文献[1]的结果. 但是, 文献[1]中的 P_c (与本文得到的 P_c 不一样) 误差很大.

3 数字结果与讨论

作为例了, 不妨设 $n_0 = 1.6, \lambda = 0.6328 \mu\text{m}, \rho_0 = 0.49 \text{ mm}, \rho = 0.235 \text{ mm}, \bar{A}^2 = 0.0375$. 图2是像距 $\bar{z}(\text{mm})$ 与物距 S_0 的关系曲线, 其中 $P_c = 0, \theta = 10^\circ, \omega_0$ 分别等于 $\lambda, 10\lambda$ 和 100λ . 从图中可以看出, 当 $\omega_0 = \lambda$ 时, 由(14)式和(18)式算出的曲线完全重合; 当 $S_0 \sim 0.9 \text{ mm}$ 时, $\bar{z} \rightarrow \infty$. 但是, 当 $\omega_0 = 10\lambda$ 时, 与上述情形不同, 当 $S_0 \sim 0.9 \text{ mm}$ 时, \bar{z} 很小. 有趣的是, 当 $\omega_0 = 100\lambda$ 时, 像距几乎不随物距的变化而变化. 这个特性值得注意. 图3是线放大率的绝对值 $|M|$ 与物距 S_0 的关系曲线, 其中 $P_c = 0, \theta = 10^\circ, \omega_0$ 分别等于 $\lambda, 10\lambda$ 和 100λ . 同样从图3可以看出, 当 $\omega_0 = \lambda$ 时, 本文公式(16式)算出的曲线与几何光学近似得到的结果(19式)完全一致. 但是, 当 $\omega_0 = 10\lambda$ 时, 在某些范围的结果相差很大. 因此, 高斯光束经过梯度折射率棒透镜的成像, 必须辅以波动光学的结果, 才能正确地进行有关的计算和设计. 图4(a)和(b)分别是 $\theta = 5.5^\circ$ 和 10° 时, 像距与物距的关系曲线, 其中 $P/P_c = 0, 0.5$ 和 $0.9, \omega_0 = 10\lambda$. 从图中可以看出, 在物距较小时, 像距明显地依赖于传播的光功率. 在物距较大时, 这种依赖性变得不明显了, 这种情形也出现在线放大率的绝对值与物距的关系曲线中, 如图5(a)和(b)所示, 所用参数与图4相同. 在子午面内, 光线的轨迹方程为^[6]

$$r = \omega_1\omega. \quad (22)$$

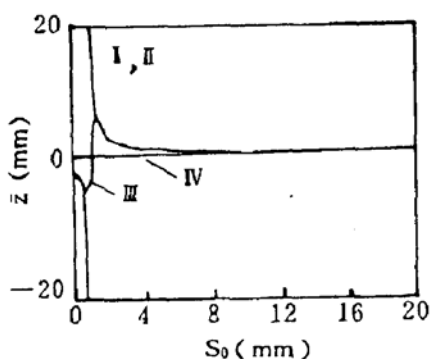


Fig. 2 Variation of imaging distance z (mm) with different object distance S_0 (mm) for $P_c = 0$ and $\theta = 10^\circ$ I; geometrical optics result II; $\omega_0 = \lambda$ III; $\omega_0 = 10\lambda$ IV; $\omega_0 = 100\lambda$

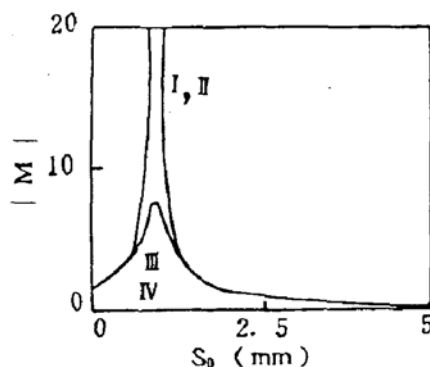


Fig. 3 Variation of the linear magnification $|M|$ with different object distance S_0 (mm) for $P_c = 0$ and $\theta = 10^\circ$. The other parameters are the same as in Fig. 2.

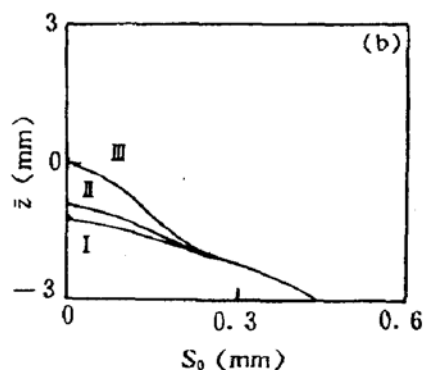
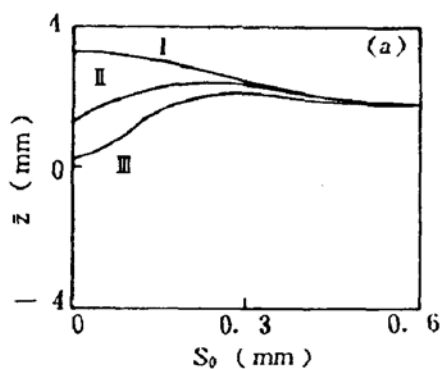


Fig. 4 Variation of imaging distance \bar{z} (mm) with different object distance S_0 (mm) for $\omega_0 = 10\lambda$ and I; $P/P_c = 0$, II; $P/P_c = 0.5$, III; $P/P_c = 0.9$ (a) $\theta = 5.5^\circ$, (b) $\theta = 10^\circ$

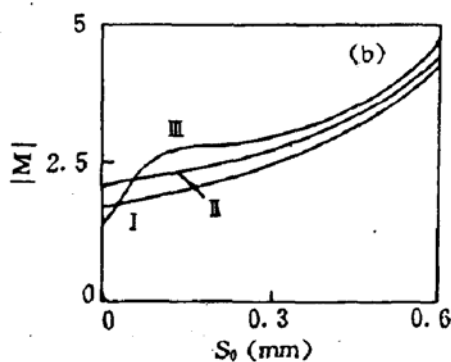
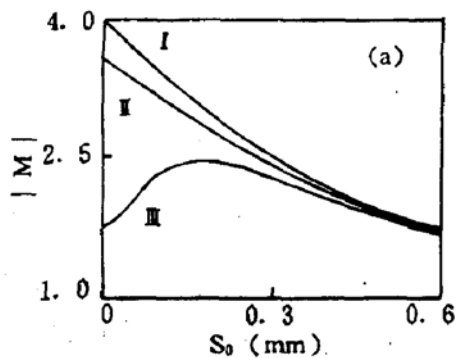


Fig. 5 Variation of the linear magnification $|M|$ with different object distance S_0 (mm) for (a) $\theta = 5.5^\circ$ and (b) $\theta = 10^\circ$. The other parameters are the same as in Fig. 4

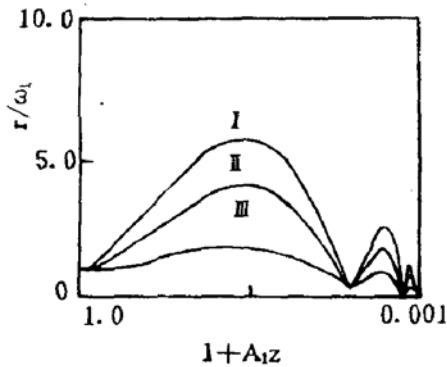


Fig. 6 Variation of ray paths with the normalized distance $1+A_1z$ for $\omega_0=10\lambda$, $S_0=0$ and

$\theta=5.5^\circ$

I : $P/P_c=0$,

II : $P/P_c=0.5$,

III : $P/P_c=0.9$

计算表明,光线的轨迹明显地依赖于传播的光功率,如图6所示,其中 $P/P_c=0, 0.5$ 和 0.9 , $\omega_0=10\lambda$, $\theta=5.5^\circ$, $S_0=0$. 从图6可以看出,功率越大,光线越接近透镜轴心,随着传播距离的增加,光线也越接近透镜轴心. 必须指出,光功率没有影响这种透镜的变周期.

总之,非线性锥形梯度折射率棒透镜中高斯光束的成像特性依赖于传播的光功率. 在线性情形中,当光束束腰较大时,几何光学近似得到的成像公式将变得不适用. 因此,本文公式给这类透镜的设计提供了更为普适的理论依据.

参 考 文 献

- [1] 陈智浩等, 非线性变折射率纤维透镜理论. 光通信技术, 1991, 15(4): 210~212
- [2] 殷宗敏等, 锥形梯度折射率的成像特性. 物理学报, 1981, 30(12): 1603~1608
- [3] A. Yariv, Introduction to optical electronics. (second edition, New York, Holt, Rinehart and winston, New York, 1976), 18~57
- [4] L. Gagnon *et al.*, Nonlinear radiation modes connected to parabolic graded index profiles by the lens transformation, *J. O. S. A. (A)*, 1991, 8(4): 601~607
- [5] 陈智浩, 赖恒, Imaging properties of Gaussian beams with a nonlinear GRIN rod. *J. O. S. A. (B)*, to be published
- [6] M. S. Sodha, A. K. Ghatak, Inhomogeneous Optical waveguides. (New York, Plenum Press), Chap. 5

Imaging properties of nonlinear conical GRIN rod lenses

CHEN Zhihao CAI Shengzhen HE Chixian

(Department of Physios, Fujian Normal University, Fuzhou 350007)

(Received 24 February 1992, revised 1 June 1992)

Abstract

Imaging formulas of Gaussian beams in nonlinear conical GRIN rod lenses are derived from the variational method and the ABCD law. It is shown that the imaging properties and the ray paths of such lenses depend on the optical power. The imaging formulas reduce to the known results when $n_2=0$ (n_2 : the nonlinear coefficient) and under the geometrical optics approximation.

Key words imaging properties, Gaussian beams, graded index.