

# 正补态光学神经网络模型性能评估

朱伟利

陈岩松 李德华

(中央民族学院物理系, 北京 100081) (中国科学院物理研究所, 北京 100080)

## 提 要

本文对一种多值光学神经网络模型——正补态模型的性能, 存贮容量、容错性及收敛性进行了评估, 并在  $N=16$  的网络上进行了计算机模拟. 结果表明, 正补态模型的性能比其它光学神经网络模型有所改善.

**关键词** 神经网络, 联想识别, 光计算.

## 1 引 言

目前, 用光子作为载体构成人工神经网络系统已成为一门引人注目的新课题. 由 Hopfield 提出的神经网络计算模型用一种较为简单的形式描述了生物神经网络的某些行为, 并具有较好的收敛性, 因而迄今所见的光学神经网络模型大多以 Hopfield 模型(HM)为基础. 但是, 该模型的外积互连矩阵因其元素的多值性和双极性, 为光学实现造成一定困难, 所以多数光学神经网络模型都对 Hopfield 原模型进行了不同方式的修改. 最常见的一种修正方式是采用“截断式”互连矩阵, 使矩阵元素变为双极二元型  $(0, \pm 1)^{[1]}$ , 以避免多值型. 为解决用光学手段不能直接表达负值问题, 有人利用正、负元素分离计算的方式<sup>[1]</sup>, 有人利用内积方法<sup>[2,3]</sup>, 有人利用偏振编码方式<sup>[4]</sup>, 还有的则根据所用各种光学器件的特点与性能采用相应的修正模型等等. 然而分析表明, 采用“截断式”修正会直接影响网络的收敛性<sup>[5]</sup>; 回避负值必须以增加器件尺寸或降低网络的识别能力为代价. 本文提出了一种新的修正模型——正补态模型(PCM), 以及与之相应的以空间光调制器 PROM 为主体的光学神经网络系统<sup>[6,7]</sup>, 既保持原模型的多值性, 又兼顾到光学执行的便利. 因而正补态模型是用光学方法实现 Hopfield 神经网络模型的一种修正.

近年来, 人们在研究各种光学神经网络模型的同时也都不同程度地从各不同角度对模型的性能进行评价, 人们普遍关心的问题可概括为存贮容量、容错性和收敛性三方面. 本文就此三方面对正补态模型的性能进行分析评估, 并给出在 16 元网络 ( $N=16$ ) 上进行联想识别计算机模拟的实验结果. 通过与其它模型的对比发现, 就性能而言, 正补态模型优于“截断式”模型(HM\*), 对 Hopfield 原模型的性能也略有改善.

## 2 正补态模型的简单表述

正补态模型是 Hopfield 神经网络模型的一个外积修正模型, 其互连矩阵由下式确定:

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^M [V_i^m V_j^m + (1 - V_i^m)(1 - V_j^m)] \quad (1)$$

其中  $C_{ij}$  是正补态模型互连矩阵的第  $i$  行第  $j$  列元素,  $i, j = 1, 2, 3 \dots N, m = 1, 2, 3, \dots M, N$  和  $M$  分别是存贮于网络的单极二元矢量  $V^m$  的位数及存贮矢量总数. 从(1)式不难看出, 正补态模型互连矩阵是存贮矢量的外积矩阵与其补矢量的外积矩阵之和, 其结构特点有三, 一是非负性, 二是多值性, 三是具有非零对角元素. 这些特点可用数学形式表述为

$$0 \leq C_{ij} \leq M, \quad C_{ii} = M \quad (2)$$

简单的推导可知, 正补态模型互连矩阵与具有非零对角元素的 Hopfield 模型的互连矩阵 ( $T'_{ij}$ ) 有下式所示的简单线性关系

$$T'_{ij} = 2C_{ij} - M \quad (3)$$

$$T'_{ij} = \sum_{m=1}^M (2V_i^m - 1)(2V_j^m - 1) \quad (4)$$

因此可以预言, 正补态模型的性能不会低于原 Hopfield 模型, 甚至还可能会有所改善, 与“截断式”模型相比, 正补态模型显然具有优势. 这些将在后面的实验中得到证实. (关于  $T'_{ij}$  与原 Hopfield 模型的关系和比较, 请见参考文献[3])

用一个单极二元  $N$  维矢量  $V^*$  对网络进行联想识别检索, 若采用正补态模型, 则第一次迭代结果为

$$\hat{V}_i^{m0} = \left[ \sum_{j=1}^N C_{ij} V_j^* \right]_{th} \quad (5)$$

式中方括号  $[ ]_{th}$  表示神经元的阈值操作, 由于对角线元素的非负特征, 计算中所取阈值应有所提高. 这样, 网络的稳定态不会因采用正补态模型而发生改变, 它仍将保持原模型的稳定态. 因此经多次迭代后, 网络将稳定在与输入矢量最接近(即 Hamming 距离最小)的一个存贮矢量  $V^{m0}$  上.

为便于后面将进行的性能评估, 这里先给出 Hopfield 原模型(HM)及“截断式”模型(HM\*)的互连矩阵表达式

$$\text{HM: } T_{ij} = \begin{cases} \sum_{m=1}^M (2V_i^m - 1)(2V_j^m - 1) & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{HM* : } T_{ij} = \begin{cases} 1 & T_{ij} > 0 \\ 0 & T_{ij} = 0 \\ -1 & T_{ij} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

这两种模型的联想识别检索过程与(5)式相似, 只需更换相应的互连矩阵即可.

### 3 正补态模型的性能评估

我们对正补态模型的存贮容量、容错性和收敛性分别进行了有关的理论分析和实验检测, 计算涉及的所有矢量均为 16 维单极二元矢量. 为便于后面的叙述, 设矢量元素中有  $p$  个元素值为 1, 有  $q$  个元素值为 0, 显然它们应满足  $p + q = N$ . 采用两组性质不同的矢量组作为网络的存贮矢量, 一组是理想矢量组, 记为  $V^{m1}$ , 其中各矢量间线性无关(或称完全正交), 且矢量元素的取值满足  $p = q = N/2$ ; 另一组是非理想矢量组, 记为  $V^{m2}$ , 其中各矢量间有线性相关的关系(或称非正交), 且每个矢量的元素取值满足  $p \neq q$ . 此外, 在对正补态模型的性能进行检测的同时, 还对 HM 和 HM\* 进行了同等条件的检测, 以便作性能对比.

#### 3.1 存贮矢量数

存贮容量是神经网络的重要性能之一. 表征一个网络的存贮容量可有多种方法<sup>[8,9]</sup>, 这里

采用一种较为直观的方法,即用网络允许存贮的最大矢量数来表征.应当看到,存贮量的多少不仅仅取决于模型本身的性能,在实际应用中主要还受存贮器件性能的限制,但这超出了本文的讨论范围.在此不妨假设所用存贮器件都是理想的,而只考虑模型本身对存贮容量的影响.

Farhat 和 Psaltis 曾提出讨论神经网络存贮容量问题所必须满足的先决条件<sup>[10]</sup>,归纳为两点:1) 必须用存贮矢量本身对网络进行检索,即输入矢量满足  $V^* = V^m$ ,以下称此情况为“自检”;2) 网络中存贮的所有矢量必须全部能被自检,即用任一存贮矢量输入网络时,总能得到与之完全相同的输出矢量.据此,可将神经网络的存贮容量定义为:存贮于网络中的存贮矢量能得以全部自检时,该网络所允许存贮的最大矢量数,记为  $M_{all}$ .

为研究正补态模型的存贮容量,采用 16 元网络 ( $N = 16$ ) 进行联想识别计算机模拟.互连矩阵分别用矢量组  $V^{m1}$  和  $V^{m2}$  按(1)式规则构成.存贮矢量数由  $M = 1$  逐步增至  $M = 15$ .逐个用存贮矢量本身对网络检索.计算结果表明,对于理想矢量组  $V^{m1}$ ,自检矢量数  $M_{self}$  几乎与  $M$  数的增加无关;对于更具普遍性的非理想矢量组  $V^{m2}$ , $M_{self}$  的值随  $M$  数的增大而减小,当  $M > N/2$  时,存贮矢量几乎不能全部被自检.本例中得到正补态模型的最大存贮矢量数为  $M_{all} = 9$ .

我们对 Hopfield 模型和“截断式”模型进行了相同条件下的计算机模拟,并与正补态模型 (PCM) 的计算结果同时列于表 1.对比三种模型的模拟结果可见,理想情况:它们的存贮容量几乎无差别;普遍情况:正补态模型的自检矢量数显然比另两个模型高.由存贮容量的定义可得 HM 和 HM\* 的存贮容量为  $M_{all} = 3 (= 0.19 N)$ ,正补态模型的存贮容量为  $M_{all} = 9 (> 0.50 N)$ .

Table 1 The comparison of three models on self-searching power.  $V^m$ : a set of stored vectors,  $V^{m1}$ : a set of ideal vectors,  $V^{m2}$ : a set of non-ideal vectors,  $M$ : the number of vectors stored in the network, and  $M_{self}$ : the number of self-searched vectors

$V^m$	$M$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$V^{m1}$	$M_{self}$	PCM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		HM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		HM*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$V^{m2}$	$M_{self}$	PCM	1	2	3	4	5	6	7	8	9	6	7	8	/	/	/
		HM	1	2	3	3	3	4	5	3	4	1	1	1	/	/	/
		HM*	1	2	3	3	1	3	3	3	2	1	1	1	/	/	/

### 3.2 容错性

容错性体现网络的误差修正能力,它是神经网络性能的又一重要表征.当网络接收到与记忆有差别的输入信息时,经过识别和修正,可将正确记忆检索出来.显然,输入信息与原记忆的差别越大,识别将越困难.就神经网络的误差修正能力而言,目前还未见有较完善的理论分析,然而大量事实表明,采用不同模型的网络,其容错性是有差异的.

我们在 16 元网络上采用理想矢量组进行计算机模拟,存贮矢量数由  $M = 1$  逐步增至  $M = 15$ ,输入矢量与相近存贮矢量  $V^{m0}$  间的差别用 Hamming 距离 ( $d_H$ ) 表示;计算中逐一取出存贮矢量作为  $V^{m0}$ ,然后将  $d_H$  由 0 逐次增至 8 以构成不同的输入矢量  $V^*$  对网络进行检索;分别用 PCM、HM 和 HM\* 三种模型在相同条件下进行联想识别模拟计算.表 2 列出了计算的部分结果,其中  $M'$  表示网络能成功识别的矢量数.表 2 所列数据表明,网络的容错能力随存贮矢

量数增加而急剧下降;采用不同模型的网络,其容错性在存贮量较低时(如  $M = 3$ )差别很小,随着  $M$  数的增加,正补态模型的容错能力略优于另两个模型.

Table 2 The comparison of the tolerance of PCM with HM and HM\*.  $M$ : the number of the vectors stored in the network,  $M'$ : the number of successfully searched vectors,  $d_H$ : Hamming distance between input vector ( $V^*$ ) and its relative stored vector ( $V^{mo}$ )

$M$	3			4			7			10		
	$M'$			$M'$			$M'$			$M'$		
	PCM	HM	HM*	PCM	HM	HM*	PCM	HM	HM*	PCM	HM	HM*
0	3	3	3	4	4	4	7	7	7	10	10	10
1	3	3	3	4	4	4	7	7	7	10	0	6
2	3	3	3	4	4	4	7	3	3	4	1	1
3	3	3	3	4	4	4	1	1	0	1	0	0
4	3	3	3	4	1	4	0	0	0	0	0	0
5	1	1	1	2	1	2	0	0	0	0	0	0
6	1	1	1	1	2	4	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

为了更直观地比较三种模型的容错能力,我们绘制了  $M_{all} - d_H$  关系图(图 1). 其中,图 1(a)是理想存贮情况,图 1(b)是非理想情况. 图中线段的横向位置  $d_H$  表示输入矢量与存贮矢量的差异,线段的长度表示在相应的  $d_H$  条件下网络能百分之百准确识别全部存贮矢量时所允许存贮的最大矢量数. 由图 1 所示结果可得三点结论:

- 1) 网络的容错能力随存贮量的增加而降低;
- 2) PCM 网络的容错性在  $M$  数较低时无明显优势,当  $M$  数增加时才略优于另两个模型;
- 3) 网络的容错性与存贮于网络中的记忆的特性有关,存贮某些较理想的记忆(如正交性好的矢量)时,可使容错能力增强.

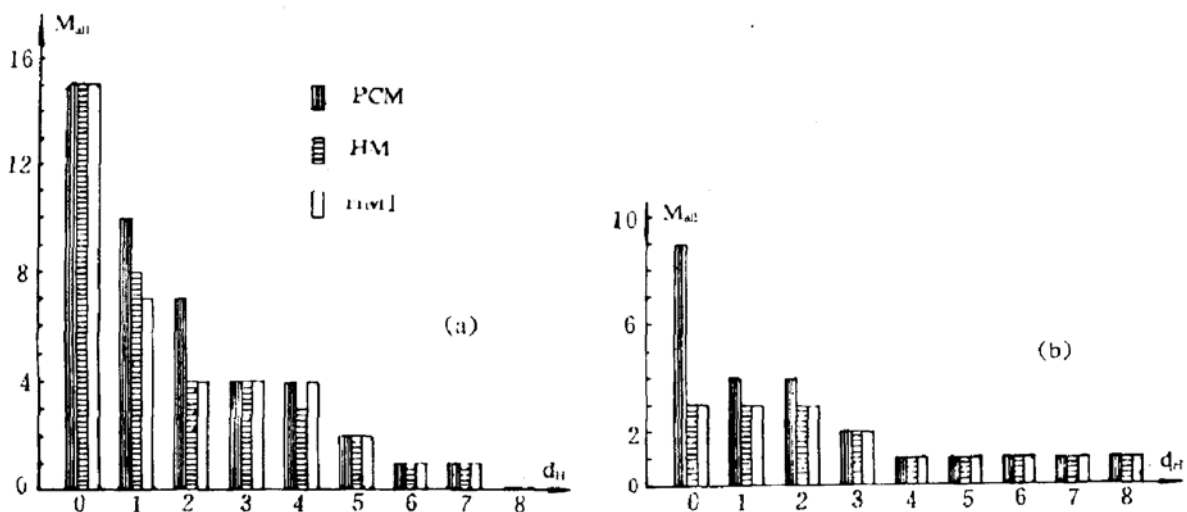


Fig. 1 A chart of capabilities of error-correction of the three neural network models.

$M_{all}$ : the maximum number of vectors allowed to be stored in the networks,

$d_H$ : Hamming distance between  $V^*$  and  $V^{mo}$

### 3.3 收敛性

收敛性是神经网络的又一重要特性,它包括收敛速度和准确率两方面.收敛速度是指网络在输入矢量激励下达到稳定的快慢程度,通常用所需迭代次数表征;收敛的准确率指网络在输入矢量激励下收敛到最邻近矢量的几率.理论分析表明,网络的收敛性取决于历次迭代结果的信噪比.PCM和HM的信噪比分别为<sup>[6]</sup>:

$$S_{\text{PCM}} = \frac{N}{2 \sum_{m \neq m_0} a_m V_i^m} \cdot V_i^{m_0}, \quad S_{\text{HM}} = \frac{N - M}{2 \sum_{m \neq m_0} a_m V_i^m} \cdot V_i^{m_0} \quad (8)$$

其中 $a_m$ 是一个与存贮矢量相互关系有关的量.比较两种模型的信噪比可知,当 $M \ll N$ 时,两者差别很小;随着存贮矢量的增加,正补态模型显示出一定优势.

我们采用了16元网络并取 $M=3$ ,用非理想矢量组 $V^{m_2}$ 作为网络的存贮矢量,分别取具有 $d_H=0,1,2$ 的输入矢量对网络进行检索,分别用三种模型在同等条件下进行模拟计算,记录每次成功检索所需的迭代次数.大量模拟计算的统计结果示于图2,图中线段所处横向位置表示网络达到稳定输出所需的迭代次数( $L$ ),线段的长度表示该迭代次数出现的几率( $h$ ).对比图2所示情况可知,当 $d_H=0$ 时,三种模型的收敛速度几乎相同;随着 $d_H$ 值的增加,所需迭代次数相应增加,但就PCM而言,低迭代次数出现的几率较大.正如理论分析所预言的,PCM的收敛性略好于另两个模型.

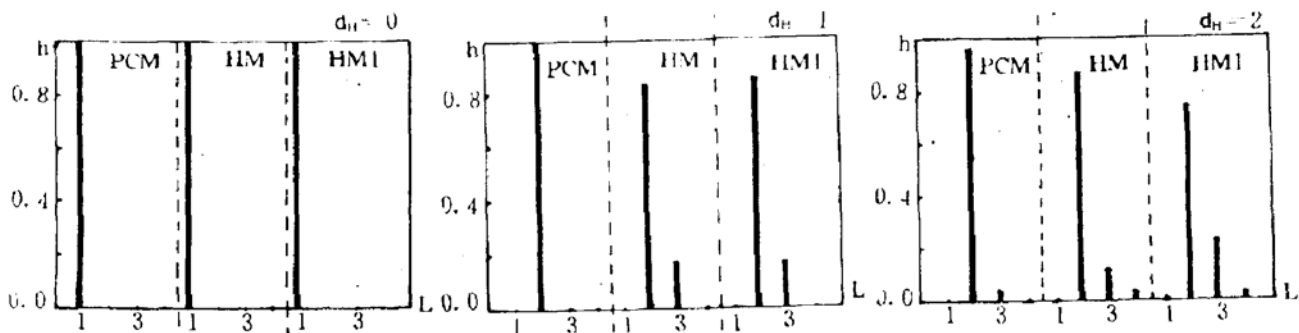


Fig. 2 A chart of convergency of the three neural network models.

$L$ : the iteration times,  $h$ : the probabilities of the value  $L$

需要说明的是,本文所涉及的全部实验数据均是对各种可能出现的不同情况(诸如存贮矢量的不同组合、误差发生的不同位置等等)进行模拟计算的统计平均结果,因而在一定程度上排除了结果的随机性.

## 4 结 论

本文对光学神经网络的一种修正模型——正补态模型的性能进行了评估,并与其它模型进行了对比.结果表明,就网络的存贮容量、容错性及收敛性等主要性能而言,正补态模型优于光学神经网络常用的“截断式”模型,也使Hopfield模型的性能得到一定程度的改善,由于正补态模型的互连矩阵较适于光学手段实现,因而它不失为一种较理想的光学神经网络模型.

实验发现,神经网络的联想识别行为受其内部存贮内容的影响很大,尤其是当存入某些结构过于奇特的矢量时,会出现较大偏差.为不失一般性,本文所涉及的全部是较为普通的矢量,即使是非理想矢量亦然.而由特殊结构的非理想矢量所引起的网络奇异性,将留待今后研究.

## 参 考 文 献

- [1] N. H. Farhat, D. Psaltis, A. Prata *et al.*, Optical implementation of the Hopfield model. *Appl. Opt.*, 1985, **24** (10): 1469~1475
- [2] R. A. Athale, H. H. Szu, C. B. Friedlander, Optical implementation of associative memory with controlled nonlinearity in the correlation domain. *Opt. Lett.*, 1986, **11**(7): 482~484
- [3] G. R. Gindi, A. F. Gmitro, K. Parthasarathy, Hopfield model associative memory with nonzero-diagonal terms in memory matrix. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(1): 129~134
- [4] S. H. Song, S. S. Lee, Properties of holographic associative memory prepared by the polarization encoding process. *Appl. Opt.*, 1988, **27**(15): 3149~3151.
- [5] 边少平, Hopfield 型光学神经网络的研究. 理学博士学位论文, 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 1990: 51~53
- [6] 朱伟利, 陈岩松, 多值神经网络改进模型及其光学实现. *光学学报*, 1992, **12**(5): 457~461
- [7] Zhu Weili, Chen Yansong, Two modified models of neural network. *Optical Memory and Networks*, 1992, (2): in press.
- [8] Y. S. Abu-Mostafa, J-M. ST. Jacques, Information capacity of the Hopfield model, *IEEE Trans. on Information Theory*, 1985, **IT-31**(4): 461~464
- [9] B. L. Montgomery, B. V. K. Vijaya Kumar, Evaluation of the use of the Hopfield neural network model as a nearest-neighbor algorithm. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(20): 3759~3766
- [10] N. H. Farhat, D. Psaltis; J. L. Horner, Ed., in *OPTICAL SIGNAL PROCESSING*. San Diego: Academic Press, 1987: 131~135

## Evaluation of Positive-Complemental optical neural network model

ZHU Weili

(Physics Department, Central Institute for Nationalities, Beijing 100081)

CHEN Yansong LI Dehua

(Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

(Received 6 March 1992; revised 18 May 1992)

## Abstract

In this paper, the performances of an optical multivalued neural network named Positive-Complemental Model (PCM) are evaluated, which includes storage capacity, tolerance and convergency. The results obtained by computer simulation in the network ( $N = 16$ ) show that the performances of the optical neural network with PCM are improved.

**Key words** neural network, associative memory, optical computing.