第12卷 第9期
1992年9月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 12, No. 9
September, 1992

平面周期物体的Lau效应

余飞鸿 李正民
(浙江大学光仪系，杭州 310027)

梁 荫 中
(武汉测绘科技大学物理组，武汉 430070)

刘 立 人
(中国科学院上海光学精密机械研究所，上海 201800)

提 要

基于部分相干理论中交叉谱密度函数的概念研究了平面周期物体的Lau效应 文章导出了平面物体Lau像光强分布式，求得了平面周期物体的Lau像光强分布及其Lau成像条件，并进行了实验验证，给出了实验结果.

关键词 Lau效应，平面周期物体，Lau成像条件.

1 引 言

Lau效应是用扩展白光光源照明一双光栅系统，在无穷远处观察的一种干涉现象. 这种现象自Lohomann[1]基于衍射理论重新提出并解释以来，引起人们广泛的兴趣，但目前对Lau效应的研究仍局限于一维光栅，平面物体Lau效应的研究也仅仅局限于90°的正交光栅[2]，任意夹角平面周期物体(以下简称平面周期物体)的Lau效应由于数学处理复杂，至今尚无人进行详细研究，文献[3]的研究只是一般的扩展. 本文拟对平面周期物体的Lau效应作一些理论和实验研究，这种研究将扩展Lau效应，是很有意义的.

2 基 本 理 论

图1是Lau效应实验装置，扩展白光光源S通过会聚透镜L_1成像照明平面物体g_1，经过平面物体g_1调制的光波照射到和g_1相隔一定间距z_0，且具有和g_1相同光透过率分布的平面物体g_2上，在一定间距z_1处放置会聚透镜L_2，则在L_2后一定间距z_2处可观察到Lau像.

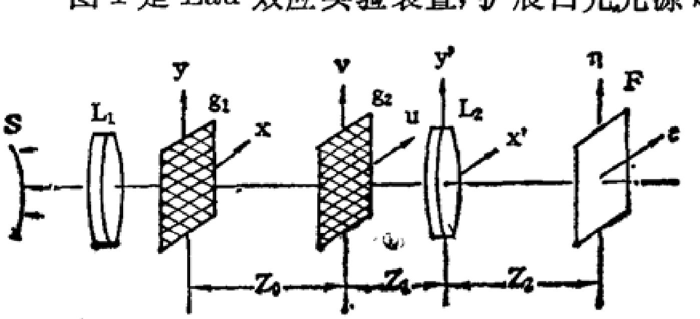

Fig. 1 The basic setup for Lau's Experiment

假设扩展白光光源成像照明在平面物体g_1上所形成的交叉谱密度函数是$w_{g_1}^{(-)}$

收稿日期：1991年5月29日

$(x_1, y_1, x_2, y_2, \omega)$，则 g_1 后的交叉谱密度函数是 $w_{g_1}^{(+)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \omega)$ 为

$$w_{g_1}^{(+)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \omega)=g_1(x_1, y_1)g_1^*(x_2, y_2)w_{g_1}^{(-)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \omega), \tag{1}$$

式中的 $g_1(x_1, y_1)$ 为平面物体 g_1 的复振幅透过率分布，$g_1^*(x_2, y_2)$ 为其复共轭，（+）表示在平面物体 g_1 的右面，（−）表示在平面物体 g_1 的左面，以下类同. 交叉谱密度在空间的传播服从亥姆霍兹(Helmholtz)方程，故由平面物体 g_1 右面传播到平面物体左面的交叉谱密度函数 $w_{g_2}^{(-)}(u_1, v_1, u_2, v_2, \omega)$ 为

$$w_{g_2}^{(-)}(u_1, v_1, u_2, v_2, \omega)=\iiiint w_{g_1}^{(+)}(x_1, y_1, x_2, y_2, \omega)\exp\{ik[(x_1-u_1)^2+(y_1-v_1)^2 - (x_2-u_2)^2-(y_2-v_2)^2]/2z_0\}dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2. \tag{2}$$

平面物体 g_2 右面的交叉谱密度函数 $w_{g_2}^{(+)}(u_1, v_1, u_2, v_2, \omega)$，根据(1)式可同样写成

$$w_{g_2}^{(+)}(u_1, v_1, u_2, v_2, \omega)=g_2(u_1, v_1)g_2^*(u_2, v_2)w_{g_2}^{(-)}(u_1, v_1, u_2, v_2, \omega). \tag{3}$$

根据(2)式同样可求得平面物体 g_2 到相隔一定间距 z_1 处即透镜 L_2 前的交叉谱密度函数 $w_{L_2}^{(-)}(x', y_1', x_2', y_2', \omega)$ 为

$$w_{L_2}^{(-)}(x_1', y_1', x_2', y_2', \omega)=\iiiint w_{g}^{(+)}(u_1, v_1, u_2, v_2, \omega)\exp\{ik[(u_1-x_1')^2+(v_1-y')^2 - (u_2-x_2')^2-(v_2-y_2')^2]/2z_1\}du_1\,dv_1\,du_2\,dv_2. \tag{4}$$

假定透镜 L_2 是一薄透镜，仅起位相因子变换作用，且对光振幅不起衰减作用，则透镜 L_2 右面的交叉谱密度函数 $w_{L_2}^{(+)}(x_1', y_1', x_2', y_2', \omega)$ 为

$$w_{L_2}^{(+)}(x_1', y_1', x_2', y_2', \omega)=w_{L_2}^{(-)}(x_1', y_1', x_2', y_2', \omega)\exp[ik(x_1'^2+y_1'^2-x_2'^2-y_2'^2)/2f]. \tag{5}$$

透镜 L_2 右面到 Lau 像面(F 平面)之间的交叉谱密度函数的传播仍同(2)式，于是 F 平面的交叉谱密度函数 $w_F(\varepsilon_1, \eta_1, \varepsilon_2, \eta_2, \omega)$ 为

$$w_F(\varepsilon_1, \eta_1, \varepsilon_2, \eta_2, \omega)=\iiiint w_{L_2}^{(+)}(x', y_1', x_2', y_2', \omega)\exp[ik[(x'-\varepsilon_1)^2 +(y_1'-\eta_1)^2-(x_2'-\varepsilon_2)^2-(y_2'-\eta_2)^2]/2z_2\}dx_1'\,dy_1'\,dx_2'\,dy_2'. \tag{6}$$

由(6)式得观测平面 F 上 Lau 像光强分布 $I(\varepsilon, \eta, \omega)$ 是

$$\begin{aligned}I(\varepsilon, \eta, \omega)&=w_F(\varepsilon_1, \eta_1, \varepsilon_2, \eta_1, \omega)\Big|_{\substack{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon\\ \eta_1=\eta_2=\eta}}\\
&=\iiiint w_{g_2}^{(+)}(u_1, v_1, u_2, v_2, \omega)\exp[ik(u^2+v_1^2-u_2^2-v_2^2)/2z_1]\,dx_1'\,dy_1'\,dx_2'\,dy_2'\\
&\cdot\iiiint\exp\left\{ik\left[(x_1'^2+y_1'^2-x_1'^2-y_2'^2)\left(\frac{1}{2z_1}+\frac{1}{2z_2}-\frac{1}{2f}\right)\right]\right\}.\\
&\cdot\exp\left\{i2\pi\left[x_2'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda z_2}+\frac{u_2}{\lambda z_1}\right)+y_2'\left(\frac{\eta}{\lambda z_2}+\frac{v_2}{\lambda z_1}\right)-x_1'\left(\frac{\varepsilon}{\lambda z_2}+\frac{u_1}{\lambda z_1}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-y_1'\left(\frac{\eta}{\lambda z_2}+\frac{v_1}{\lambda z_1}\right)\right]\right\}dx_1'\,dy_1'\,dx_2'\,dy_2'.\end{aligned} \tag{7}$$

在(7)式中令

$$u_1=u+\alpha,\ v_1=v+\beta,\ u_2=u,\ v_2=v. \tag{8}$$

又 Lau 像观测一般是在透镜 L_2 的后焦平面上，故 $z_2=f$，根据文献[4]对(7)式中的第二个四重积分实施运算得 F 平面 Lau 像光强分布是

$$I(\varepsilon,\ \eta,\ \omega)=\iiiint w_{g_2}^{(+)}(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \omega)\exp\{-i2\pi[(\alpha/\lambda f)\varepsilon+(\beta/\lambda f)\eta]\}du_1dv_1du_2dv_2. \tag{9}$$

由(9)式可知，平面物体 Lau 效应的 Lau 像光强分布是光源 S，平面物体 g_1、g_2 组成的系统在 g_2 后面形成的交叉谱密度函数 $w_{g_2}^{(+)}(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \omega)$ 的四维傅里叶变换.

3 平面周期物体的 Lau 效应

假定扩展光源 S 面积足够大，非相干照明平面周期物体 g_1 的条件总能满足，于是平面周期物体 g_1 上的交叉谱密度函数 $w_{g_1}^{(-)}(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \omega)$ 为

$$w_{g_1}^{(-)}(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \omega)=i_\omega(x_1,\ y_1)\delta(x_1-x_2,\ y_1-y_2). \tag{10}$$

则由(1)式知 g_1 右面的交叉谱密度函数为

$$\begin{aligned}w_{g_1}^{(+)}(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2,\ \omega)&=i_\omega(x_1,\ y_1)\delta(x_1-x_2,\ y_1-y_2)g_1(x_1,\ y_1)g^*(x_2,\ y_2)\\&=|g_1(x_1,\ y_1)|^2\delta(x_1-x_2,\ y_1-y_2).\end{aligned} \tag{11}$$

在(11)式的推导中假定 $i_\omega(x_1,\ y_1)$ 是一缓变函数，在以后分析中可以略去或总能提取到积分号外. 将(11)式代入到(2)式中得 g_2 前面的交叉谱密度函数为

$$\begin{aligned}w_{g_2}^{(-)}(u_1,\ v_1,\ u_2,\ v_2,\ \omega)=&\exp[ik(u_1^2+v_1^2-u_2^2-v_2^2)/2z_0]\\&\cdot\iint|g_1(x_1,\ y_1)|^2\cdot\exp\{-ik[(u_1-u_2)x_1\\&+(v_1-v_2)y_1]/z_0\}dx_1dy_1.\end{aligned} \tag{12}$$

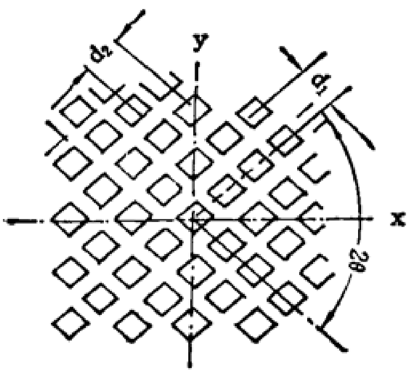

Fig. 2 The mathematical expression of the plane-periodic object, d_1, d_2 are the periods of the plane-periodic object, 2θ is the angle between the two periodic directions

平面周期物体 g_1、g_2 的数学表示根据文献[5]可用其单胞和二维倾斜疏状函数的卷积来表示. 假定平面周期物体单胞的透过率是 $g_0(x,\ y)$，两个方向的周期是 d_1，d_2，两周期方向的夹角是 2θ，坐标选择如图 2，则平面周期物体可表示成

$$g(x,\ y)=g_c(x,\ y)⊛⊛\mathrm{comb}\left(\frac{\sin\theta}{d_1}x-\frac{\cos\theta}{d_1}y,\ \frac{\sin\theta}{d_2}x+\frac{\cos\theta}{d_2}y\right). \tag{13}$$

(13)式中⊛⊛表示二维卷积，将(13)式代入(12)式有

$$\begin{aligned}w_{g_2}^{(-)}(\alpha,\ \beta,\ u,\ v,\ \omega)=&\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp[i\pi(\alpha^2+\beta^2)/\lambda z_0]G_c\left(\frac{\alpha}{\lambda z_0},\ \frac{\beta}{\lambda z_0}\right)⊛⊛\\&G_c\left(-\frac{\alpha}{\lambda z_0},\ -\frac{\beta}{\lambda z_0}\right)\delta\left[\alpha-\left(\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\lambda z_0\sin\theta,\right.\\&\left.\beta-\left(\frac{-m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\lambda z_0\cos\theta\right]\cdot\exp[i2\pi(\alpha u+\beta v)/\lambda z_0].\end{aligned} \tag{14}$$

(14)式的化简中用到(13)式的傅里叶变换[5]及(8)式，由(3)式得 g_2 右面的交叉谱密度函数为

$$w_{g_2}^{(+)}(\alpha,\ \beta,\ u,\ v,\ \omega)=g_2(u_1,\ v_1)g_2^*(u_2,\ v_2)w_{g_1}^{(-)}(\alpha,\ \beta,\ u,\ v,\ \omega)$$
$$=g_2(u,\ v)g_2^*(u+\alpha,\ v+\beta)w_{g_1}^{(-)}(\alpha,\ \beta,\ u,\ v,\ \omega). \tag{15}$$

将(14)式、(15)式代入(9)式中得到平面周期物体 Lau 效应的 Lau 像光强分布为

$$I(\varepsilon,\ \eta,\ \omega)=\iiiint \exp[-ik(\varepsilon\alpha+\eta\beta)/f]g_2(u,\ v)g_2^*(u+\alpha,\ v+\beta)w_{g_1}^{(-)}(\alpha,\ \beta,\ u,\ v,\ \omega)$$
$$\cdot d\alpha\, d\beta\, du\, dv=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_{mn}B_{mn}\exp\Big[i2\pi\frac{\lambda z_0}{d_1 d_2 R_1 R_2}$$
$$\cdot(m^2R_1^2+n^2R_2^2-2mnR_1R_2\cos 2\theta\Big]$$
$$\cdot\exp\left\{-ik\left[\left(\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\lambda z_0\varepsilon\cos\theta+\left(-\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_3}\right)\lambda z_0\eta\cos\theta\right]\Big/f\right\} \tag{16}$$

$$C_{mn}=G_c\left[\left(\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\sin\theta,\ \left(-\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\cos\theta\right]\circledast\circledast$$
$$G_c^*\left[-\left(\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\sin\theta,\ -\left(-\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\cos\theta\right], \tag{17}$$

$$B_{mn}=\iint g_2(u,\ v)g_2\left[u+\left(\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)\lambda z_0\sin\theta,\ v+\left(-\frac{m}{d_2}+\frac{n}{d_2}\right)\lambda z_0\cos\theta\right]$$
$$\cdot\exp\left\{i2\pi\left[\left(\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)u\sin\theta+\left(-\frac{m}{d_1}+\frac{n}{d_2}\right)v\cos\theta\right]\right\}. \tag{18}$$

式中 $G_c(\quad)$是 $g_c(\quad)$的傅里叶变换，至此，平面周期物体 Lau 效应的 Lau 像光强分布归结为(16)式中二次位相因子的消除及 B_{mn} 因子的化简，它是确定平面周期物体 Lau 成象条件的依据，下面将讨论这种依据。

分析(16)式中的二次位相因子知，该二次位相因子消除条件相当于下面的多值方程

$$\exp\left[i\pi\frac{\lambda z_0}{d_1 d_2 R_1 R_2}(m^2R_1^2+n^2R_2^2-2mnR_1R_2\cos 2\theta)\right]=\pm 1, \tag{19}$$

要使(19)式成立，首先必须有

$$\frac{\lambda z_0}{d_1 d_2 R_1 R_2}=\alpha' \quad 或 \quad z_0=\alpha' R_1 R_2 d_1 d_2/\lambda, \quad (\alpha'=1,2,3,\cdots) \tag{20}$$

将(20)式代入(19)式又有

$$\exp\{i\pi[\alpha'(m^2R_1^2+n^2R_2^2)+2\alpha' mnR_1R_2\cos 2\theta]\}=\pm 1. \tag{21}$$

上式对所有 m、n 都成立又必须有

$$\alpha' R_1R_2\cos 2\theta=L, \quad 0\leqslant L\leqslant \alpha' R_1R_2-1 \quad (L=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{21}$$

于是在(20)式，(21)式同时满足的条件下，(19)式成立，(16)式中二次位相因子消除，此时 B_{mn} 可简化成 C_{mn}^*. 于是平面周期物体 Lau 效应的 Lau 像光强分布即(16)式可以简化为

$$I(\varepsilon,\ \eta,\ \omega)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_{mn}|^2(-1)^{\alpha'(m^2R_1^2+n^2R_2^2)}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{-i2\pi\left[\left(\frac{m}{d_1 f/z_0}+\frac{n}{d_2 f/z_0}\right)\varepsilon\sin\theta\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(-\frac{m}{d_1 f/z_0}+\frac{n}{d_2 f/z_0}\right)\eta\cos\theta\right]\right\}. \tag{22}$$

(22)式中 C_{mn} 是单胞傅里叶变换的自卷积，可由(17)式决定. 把获得平面周期物清晰 Lau 像的条件，即(20)式和(21)式称为 Lau 间距条件和角度限制条件. 分析(20)式和(21)式知，

平面周期物体 Lau 效应的 Lau 像光强分布受到两平面周期物体 g_1 和 g_2 之间的间距 z_0 及平面周期物体两周期方向夹角 2θ 的限制. 根据(20)式和(21)式知，对一给定夹角为 2θ 的平面周期物体，当 z_0 满足基本 Lau 间距 $R_1R_2d_1d_2/\lambda$ 的整数倍值时，并不总能观察到清晰的 Lau 像，只有当 2θ 同时满足(21)式的角度限制条件时，即平面周期物体两周期方向夹角 2θ 使 L 为 0 或正整数时，才能观察到清晰 Lau 像.

为简单起见，选用 $d_1=d_2=d$，则 $R_1=R_2=1$ 的平面周期物体，此时 Lau 间距条件和角度限制条件可以写成

$$z_0=\alpha' d^2/\lambda, \quad (\alpha'=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{22}$$

$$\alpha' \cos 2\theta=1,\ 0\leqslant L\leqslant \alpha'-1, \quad (L=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{23}$$

选取 $\alpha'=1\sim4$ 之间的倍率常数，则由(23)式可求得在这些倍率处可以观察到清晰 Lau 像的各种角度值 2θ 如表1所示.

Table 1 The angles having clear Lau images

$2\theta°$; α \ L	0	1	2	3
1	90			
2	90	60		
3	90	70.5	48.2	
4	90	75.5	60	41.4

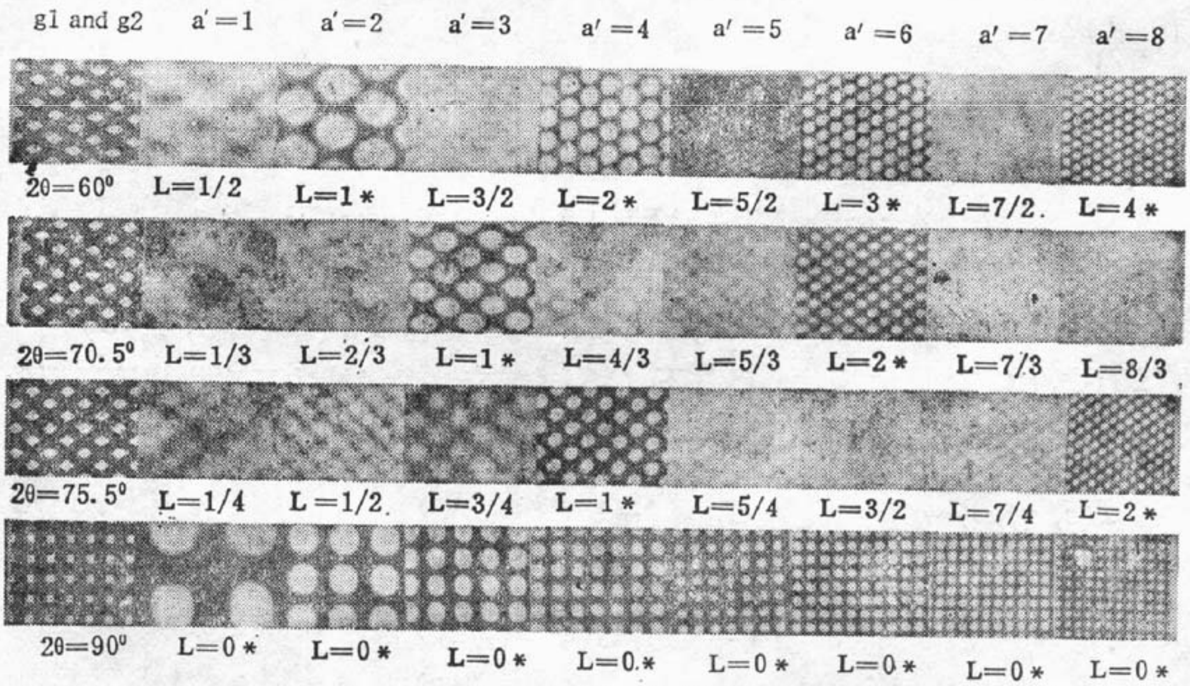

Fig. 3 The Lau images produced by the (a) 60°, (b) 70.5°, (c) 75.5°, (d) 90°, plane-periodic objects, distance between the plane-periodic objects g_1, g_2 is $\alpha' d^2/\lambda$. The value L is calculated according to Eqs. (23), (24). From the Lau images we find only integer values L can obtain clear Lau images

4 实验结果

选用 $d_1=d_2=d=0.235\,\mathrm{mm}$ 的平面周期物体，该平面周期物体两倾斜周期方向的透光宽度小于两方向周期的一半，为 0.100 mm，以保证经平面周期物体衍射的交叉谱项参与成像．选取两周期方向夹角为 60°，70.5°，75.5°，90° 等共 4 组在 $\alpha'=1\sim8$ 时拍摄了 Lau 像，如图 3 所示．在本实验中，扩展光源直径为 7.5 cm，为拍摄 Lau 像，在 Lau 实验光路中加了一中心透过率是 594 nm 的干涉滤光片，因而基本 Lau 间距为 $(d^2/\lambda)=9.4\,\mathrm{cm}$．从图 3 可见，结果符合 Lau 成像条件(22)式和(23)式．实验系统原理图如图 1 所示，在该图中 z_1 任意，z_2 为透镜 L_2 的焦距，拍摄时，照相机对 L_2 焦平面 F 聚焦即可．也可直接将全息干板放在 F 平面曝光即可．

参 考 文 献

[1] J. Jahns, A. W. Lohmann, The Lau effect (A Diffraction Experiment With Incoherent Illumination). *Opt. Comm.*, 1979, **28**(3): 263～269
[2] Yih-Shyang Cheng, Fringe Formation With a Cross-grating Interferometer. *Appl. Opt.*, 1986, **25**(22): 4185～4191
[3] 刘立人．平面物体的 Lau 效应理论．光学学报, 1986, **6**(6): 807～814
[4] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-hill, 1968: 163
[5] J. D. Gaskill, *Linear System, Fourier Transforms and Optics*. John Wiley & Sons Ins. 1978: 69～97

Lau effect of the plane-periodic object

YU FEIHONG　　LI ZHENGMIN
(*Optical Engineering Department, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

LIANG YINZHONG
(*Physics Department, Wuhan Surveying & Mapping Technology University, Wuhan* 430070)

LIU LIREN
(*Shanghai Institute of Optics & Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai* 201800)

(Received 29 May 1991)

Abstract

Based on the cross-spectral density function, this paper discussed the Lau effect of the plane-periodic object. First, we derived the light intensity distribution of the Lau image of the general plane-object,, then that of the Lau image of the plane-periodic object and the Lau imaging conditions. These coditions contain the Lau separation and the angle restricted condition. Finally we give out the experimental results.

Key words　Lau effect, Plane-periodic object, Lau imaging condition.