

# 会聚光路中的三轴稳像棱镜组

赵跃进 连铜淑

(北京理工大学工程光学系, 北京 100081)

## 提 要

本文以反射棱镜共轭理论为基础, 提出了在会聚光路中用二块棱镜实现三自由度稳像的方案, 并推导了相应的公式. 借助于计算机使用优化方法对简化公式进行了修正. 为多自由度稳像提供了新的途径.  
关键词 反射棱镜, 稳像, 三轴稳像棱镜组.

## 1 引 言

在一般的会聚光学系统中, 通常要稳定的有三个自由度: 图像绕光轴的转动以及沿与光轴相垂直的方向上的两个移动分量. 因会聚光路中的空间有限, 难于布置较多的稳像棱镜, 总是希望用较少的棱镜实现尽可能多自由度的稳像. 比较常见的是用一块棱镜实现会聚光路中的一自由度或二自由度的稳像, 而要进行三自由度稳像, 至少要用二块以上的棱镜. 如何将棱镜进行组合, 且其组合方式为最优, 这正是本文所要研究的问题. 文章通过对现有棱镜的分析, 提出了用二块棱镜实现三自由度稳像的最优方案.

## 2 理 论 分 析

立方棱镜、别汉棱镜等具有反射次数为奇次,  $2\varphi=180^\circ$ , 且入射出射光轴重合, 特征方向与光轴垂直的特性. 当其作绕光轴方向旋转时, 使像绕同一轴线旋转, 因此把具有以上特点的棱镜称为像旋转器. 另外, 道威屋脊棱镜、别汉屋脊棱镜等一类棱镜, 它们都具有反射次数为偶次,  $2\varphi=180^\circ$ , 成像螺旋轴与光轴重合, 特征方向与光轴平行的特性, 它们作绕垂直于光轴的任何方向旋转时, 都使像在与光轴和转轴相垂直的方向上产生移动(平行光路中为光轴偏), 把这些棱镜称为圆束偏器. 如果把二块棱镜组合成为一棱镜组, 使它能起到像旋转器和圆偏器的双重作用, 那么, 这一棱镜组能实现会聚光路中三自由度稳像的要求. 通过对现有稳像光学仪器的分析, 发现二块像旋转器类棱镜的主截面相互垂直的前后放置组合成为一棱镜组, 该棱镜组具有圆束偏器和像旋转器的成像作用. 可以这样分析该棱镜组, 当把它看作为一个整体时, 表现为它的组合特性, 它完全等同于一个圆束偏器的作用, 起到稳定光轴两个方向的作用; 而当二棱镜相互绕光轴方向转动时, 又显示了它们的个性——像旋转器的作用, 能消除像倾斜. 综上所述, 这种棱镜组是解决三自由度稳像的最优方案, 其潜在优势是把像旋转器和圆束偏器的功能综合于一身, 它既是像旋转器, 也是圆束偏器; 在稳像的同时, 能兼作正像器; 具有圆对称性, 结构上易于实现. 我们把这一棱镜组称

为三轴稳像棱镜组。该棱镜组可应用在图像制导的导引系统中,以利准确的制导,也可应用在进行航空摄影的航空相机中,以便得到清晰的图像。

### 3 三轴稳像棱镜组的稳像公式

在会聚光路中因共轴性的要求,不允许反射棱镜作较大的转动,因此,这里只推导微量转动的公式。对于会聚光路,通用的相对稳像的公式为

$$J_{SP}(\Delta\theta) = (-1)^{t_s} O_f R R_{前}(-\Delta\epsilon), \quad (1)$$

$$O_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f' \\ 0 & f' & 0 \end{pmatrix},$$

式中右边为光学仪器受到外界扰动( $\Delta\epsilon$ )后,像点 $F'$ 发生的小位移量;左边为稳像棱镜作补偿转动( $\Delta\theta$ )后,所引起的像点位移量; $J_{SP}$ 为像点位移矩阵; $t_s$ 为系统总的反射面数; $R$ 、 $R_{前}$ 分别代表稳像棱镜、前置系统的成像矩阵; $O_f$ 为与焦距矢量 $f$ 相对应的叉乘矩阵。

由棱镜调整原理可知,在会聚光路中,把图1中的二块棱镜看作作为一个整体,当棱镜组绕 $P$ 轴转动 $\Delta\theta$ 后,所产生的像点位移量为

$$(\Delta S'_{F'}) = \Delta\theta(P \times \rho_{F'}) + (-1)^{t-1} \Delta\theta(P' \times \rho'_{F'}). \quad (2)$$

由图1可看出 $\rho_F = \rho_{F'} + F'F$ 。因 $R$ 是成像矩阵, $P' = R(P)$ , $\rho'_{F'} = R(\rho_{F'} + F'F)$ 。则(2)式可写为

$$(\Delta S'_{F'}) = \Delta\theta(P \times \rho_{F'}) + (-1)^{t-1} \Delta\theta[R(P)] \times [R(\rho_{F'} + F'F)], \quad (3)$$

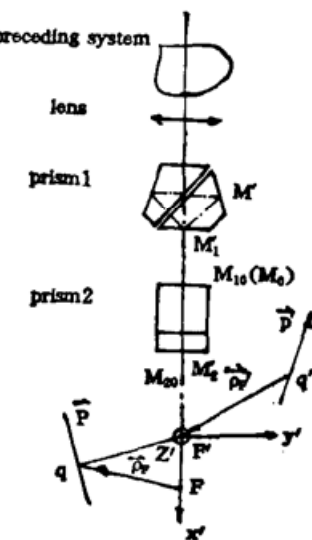


Fig. 1

求 $F'F$ 的大小,取二块外形尺寸一样的像旋转器棱镜。把第一块棱镜的物 $M_{10}$ 的像 $M'_1$ 看作第二块棱镜的物。对于第二块棱镜来说, $M_{20}$ 是一对共轭基点的物方基点, $M'_1$ 到 $M_{20}$ 的距离是棱镜2的物到物方基点的距离,那么由物 $M'_1$ 所成的像的位置应该是沿 $M_{20}M'_1$ 方向,距离为 $|M_{20}M'_1|$ 的位置 $M'$ 。很明显, $M'$ 到 $M'_1$ 和 $M'_1$ 到 $M_{10}$ 的距离是相同都为 $|M'_1M_{10}|$ ,则整个棱镜组的物 $M_0$ 到像 $M'$ 的距离为 $2|M'_1M_{10}|$ 。同理, $F'F = 2M'_1M_{10}$ 。

求 $\Delta S'_{F'}$ 的具体表达式,在图1中的坐标系中

$$P = \begin{pmatrix} P_{x'} \\ P_{y'} \\ P_{z'} \end{pmatrix}, \quad \rho_{F'} = \begin{pmatrix} -x'_{F'} \\ -y'_{F'} \\ -z'_{F'} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$P \times \rho_{F'} = -(P_{y'}z'_{F'} - P_{z'}y'_{F'})\mathbf{i} - (P_{z'}x'_{F'} - P_{x'}z'_{F'})\mathbf{j} - (P_{x'}y'_{F'} - P_{y'}x'_{F'})\mathbf{k}. \quad (5)$$

因两块棱镜有相对转动,则 $R$ 应是由一棱镜转动 $\tau$ 以后的棱镜组的成像矩阵。设棱镜1不动,而棱镜2绕 $x'$ 轴旋转 $\tau$ 角,有

$$R'_2 = (-1)^{t_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\tau & -\sin 2\tau \\ 0 & -\sin 2\tau & \cos 2\tau \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$R = R_2 R_1 \quad (7)$$

由棱镜调整图表可查出

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

(6)式中的  $t_2$  为棱镜的反射面数, 对于像旋转器棱镜均为奇数, 且当棱镜 1 按图 1 所示的位置放置时, 成像矩阵  $R_1$  由(8)式给出. 则

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ 0 & -\sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$R(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\gamma & \sin 2\gamma \\ 0 & -\sin 2\gamma & -\cos 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ -P_y \cos 2\gamma - P_z \sin 2\gamma \\ -P_y \sin 2\gamma - P_z \cos 2\gamma \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$R(\rho_{F'} + \mathbf{F}'\mathbf{F}) = \begin{pmatrix} -x'_{F'} + F'F \\ y'_{F'} \cos 2\gamma - z'_{F'} \sin 2\gamma \\ y'_{F'} \sin 2\gamma + z'_{F'} \cos 2\gamma \end{pmatrix}. \quad (11)$$

在(3)式中的  $t$  为二棱镜反射面数之和, 为 10. 有

$$\begin{aligned} & (-1)^{t-1} [R(\mathbf{P})] \times [R(\rho_{F'} + \mathbf{F}'\mathbf{F})] \\ &= - \begin{pmatrix} P_y z'_{F'} - P_z y'_{F'} \\ -(-x'_{F'} + F'F)(P_y \sin 2\gamma + P_z \cos 2\gamma) - P_x (y'_{F'} \sin 2\gamma + z'_{F'} \cos 2\gamma) \\ -(-x'_{F'} + F'F)(-P_y \cos 2\gamma + P_z \sin 2\gamma) + P_x (y'_{F'} \cos 2\gamma - z'_{F'} \sin 2\gamma) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$(\Delta \mathbf{S}'_{F'}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (P_x (z'_{F'} + y'_{F'} \sin 2\gamma + z'_{F'} \cos 2\gamma) + P_y \sin 2\gamma (-x'_{F'} + F'F) \\ + P_z [-x'_{F'} + \cos 2\gamma (-x'_{F'} + F'F)]) \\ (P_x (-y'_{F'} - y'_{F'} \cos 2\gamma + z'_{F'} \sin 2\gamma) + P_z \sin 2\gamma (-x'_{F'} + F'F) \\ + P_y [x'_{F'} - \cos 2\gamma (-x'_{F'} - F'F)]) \end{pmatrix} \Delta\theta. \quad (13)$$

因  $\Delta \mathbf{S}'_{F'}$  的另一表达式为

$$(\Delta \mathbf{S}'_{F'}) = \Delta\theta \mathbf{J}_{SP}(\mathbf{P}). \quad (14)$$

由(13)和(14)式, 可求得

$$\mathbf{J}_{SP} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ z'_{F'} + y'_{F'} \sin 2\gamma + z'_{F'} \cos 2\gamma & \sin 2\gamma (-x'_{F'} + F'F) & -x'_{F'} + \cos 2\gamma (-x'_{F'} + F'F) \\ -y'_{F'} - y'_{F'} \cos 2\gamma + z'_{F'} \sin 2\gamma & x'_{F'} - \cos 2\gamma (-x'_{F'} + F'F) & \sin 2\gamma (-x'_{F'} + F'F) \end{pmatrix}. \quad (15)$$

设  $R_{前} = E$ , (1)式的左右两边分别为

$$(-1)^{t\Sigma} C_j R R_{前} (-\Delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -f'(\Delta \varepsilon_y \sin 2\gamma + \Delta \varepsilon_x \cos 2\gamma) \\ f'(\Delta \varepsilon_y \cos 2\gamma - \Delta \varepsilon_x \sin 2\gamma) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$J_{SP}(\Delta\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta_{y'} \sin 2r (-x'_{F'} + F'F) + \Delta\theta_{z'} [-x'_{F'} + \cos 2r (-x'_{F'} + F'F)] \\ \Delta\theta_{y'} [x'_{F'} - \cos 2r (-x'_{F'} + F'F)] + \Delta\theta_{z'} \sin 2r (-x'_{F'} + F'F) \end{pmatrix}. \quad (17)$$

式中  $i_2 = 10$ ,

$$\Delta\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta\theta_{y'} \\ \Delta\theta_{z'} \end{pmatrix}, \quad \Delta\epsilon = \begin{pmatrix} \Delta\epsilon_{x'} \\ \Delta\epsilon_{y'} \\ \Delta\epsilon_{z'} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

将(16)和(17)两式代入(1)式,并令  $-x'_{F'} + F'F = b$ , 得到了扰动量  $\Delta\epsilon$  与补偿量  $\Delta\theta$  之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_{y'} &= -\frac{\Delta\epsilon_{y'}(b - x'_{F'} \cos 2r) + \Delta\epsilon_{z'} x'_{F'} \sin 2r}{b^2 + x'^2_{F'} - 2x'_{F'} b \cos 2r} f', \\ \Delta\theta_{z'} &= -\frac{\Delta\epsilon_{z'}(b - x'_{F'} \cos 2r) + \Delta\epsilon_{y'} x'_{F'} \sin 2r}{b^2 + x'^2_{F'} - 2x'_{F'} b \cos 2r} f'. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

下面推导二棱镜组相对绕  $x'$  轴转动,以消除外界扰动所产生的像倾斜的公式. 在上面推导  $\Delta\epsilon$  和  $\Delta\theta$  的关系时,我们用了绕  $x'$  轴的转动  $r$  为有限转动. 这里在推导补偿像倾斜的公式时,仍以有限转动来求解. 由反射棱镜稳像的基本原理可知,当外界有一  $r'$  的扰动时,为了消除由此所产生的像倾斜,二棱镜相对转动  $r$ , 则  $r$  与  $r'$  的关系可由下式求得.

$$S_{P_{x'}, r} R'_2 S_{P_{x'}, -r} R_1 R_{\text{前}} S_{P_{x'}, -r} = R'_2 R_1 R_{\text{前}}, \quad (20)$$

式中  $S_{P_{x'}, r}$  为绕  $P_{x'}$  轴转  $r$  角的转动矩阵;  $A$  为一垂直于光轴平面内的矢量(且认为  $A$  是任意矢量). 把(6)式、(8)式和

$$\left. \begin{aligned} S_{P_{x'}, r} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r & -\sin r \\ 0 & \sin r & \cos r \end{pmatrix}, \\ S_{P_{x'}, -r'} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos r' & \sin r' \\ 0 & -\sin r' & \cos r' \end{pmatrix}, \\ S_{P_{x'}, -r} &= S_{P_{x'}, r}^T, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

代入(20)式得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(2r - r') & \sin(2r - r') \\ 0 & -\sin(2r - r') & -\cos(2r - r') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

解(22)式的矩阵方程,可得

$$r = r'/2. \quad (23)$$

(19)式和(23)式组成了三轴稳像棱镜在会聚光路中的稳像公式\*

#### 4 公式的简化与最优化

对于(23)式,因  $\Delta\epsilon_{y'}$  和  $\Delta\epsilon_{z'}$  比较小,  $\Delta\theta_{y'}$  和  $\Delta\theta_{z'}$  也是一个较小的量. 而  $r$  是一个有限

\* 当  $R_{\text{前}} \neq E$  时,也可推导出相同形式的稳像公式.

转动量, 但当  $r=90^\circ$  时, 将破坏整个棱镜组的成像特性. 从实际的应用来看, 为了和  $y'$ 、 $z'$  两方向的稳定范围相适应,  $r$  和  $r'$  角的值也不应取的太大. 为此, 可将  $r'$ 、 $\Delta\varepsilon_{y'}$  和  $\Delta\varepsilon_{z'}$  角度值限制在一定的范围内, 对 (23) 式进行简化. 由  $\cos 2r \approx 1$ ,  $\sin 2r \approx 2r$  代入 (19) 式, 得

$$\left. \begin{aligned} \Delta\theta_{y'J} &= -a_1\Delta\varepsilon_{y'} - a_2\Delta\varepsilon_{z'}r, \\ \Delta\theta_{z'J} &= -a_1\Delta\varepsilon_{z'} + a_2\Delta\varepsilon_{y'}r, \\ a_1 &= f'/(b-x'_{F'}), \\ a_2 &= 2x'_{F'}f'/(b-x'_{F'})^2, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

为使简化公式的绝对误差尽量减小, 对 (24) 式也可以进行优化处理.

为使求出的  $a_1$ 、 $a_2$  能使简化公式与原公式之差在限定的范围内的  $r'$ 、 $\Delta\varepsilon_{y'}$  和  $\Delta\varepsilon_{z'}$  的不同取值处都比较小, 可取当  $r'$ 、 $\Delta\varepsilon_{y'}$  和  $\Delta\varepsilon_{z'}$  在一定的取值范围内的简化公式与原公式绝对误差的最大值为目标函数. 考虑到  $\Delta\varepsilon_{y'}$  和  $\Delta\varepsilon_{z'}$  的正负性以及  $\Delta\theta_{y'}$  和  $\Delta\theta_{z'}$  的对称性, 当取下式时, 将包括各种可能性.

则该问题表示成为下边的数学模型

$$\text{sub max}(|\Delta\theta_{y'} - \Delta\theta_{y'J}| + |\Delta\theta_{z'} - \Delta\theta_{z'J}|)_{\substack{\varepsilon_{y'j} \\ \varepsilon_{z'j} \\ r_k}} \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{y'_i} &= (\pi/180^\circ)(i-1)/3, \quad (i=1, 2, \dots, n_1) \\ \varepsilon_{z'_j} &= (\pi/180^\circ)(j-1)/3, \quad (j=1, 2, \dots, n_2) \\ r'_k &= (\pi/180^\circ)(k-1), \quad (k=1, 2, \dots, n_3) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

式中  $n_1$ 、 $n_2$ 、 $n_3$  分别为  $\varepsilon_{y'}$ 、 $\varepsilon_{z'}$ 、 $r'$  的取值范围. 为了说明上述优化方法的可行, 取下述已知参量的例子用上述方法计算.

用二块别汉棱镜组成三轴稳像棱镜组, 它的  $n=1.5163$ ,  $D=20$  mm;  $\Delta\varepsilon_{y'}$ 、 $\Delta\varepsilon_{z'}$  的取值范围为  $(-5^\circ, 5^\circ)$ ,  $r'$  在  $(-10^\circ, 10^\circ)$ . 由棱镜调整图表查出并计算得:

$$M'_1M_{10} = -1.207D + 4.621(D/n) = 36.821(\text{mm})$$

$x'_{F'}$  取为棱镜组在光轴方向上的中点. 并取  $M'_2$  到  $O'$  的距离为 20 mm. 两棱镜之间的距离为 16 mm, 则有

$$x'_{F'} = -1.207D - (8+20) = -52.14(\text{mm}),$$

$$b = 2M'_1M_{10} - x'_{F'} = 126.762(\text{mm}).$$

取  $f'=150$  mm, 将  $x'_{F'}$ 、 $b$ 、 $f'$  的值代入 (19) 和 (24) 式, 在 IBM-PC 上用约束可变多面体的优化方法计算, 得

$$a_1 = 0.8463, \quad a_2 = -0.4967.$$

(19) 式与 (24) 式在上述取值范围内的绝对误差最大值为

$$\text{max}|\Delta\theta_{y'} - \Delta\theta_{y'J}| = 0.278 \text{ m rad}$$

$$\text{max}|\Delta\theta_{z'} - \Delta\theta_{z'J}| = 0.278 \text{ m rad}$$

由此说明使用 (24) 式可以满足一般的稳像精度要求. 同时也说明本系统可应用在  $(-5^\circ, 5^\circ)$  的稳像范围内, 这是符合会聚光路对共轴性的要求. 本文用反射棱镜稳像的基本原理在理论上对三轴稳像棱镜组在会聚光路中的应用作了定量的分析, 并得到了便于工程使用的最优简化稳像公式.

## 参 考 文 献

- [1] 连铜淑. 反射棱镜共轭理论, 北京: 北京理工大学出版社, (1988)
- [2] 连铜淑. 三轴稳像棱镜组. 云光技术, 1989(3~4): 1
- [3] Lian Tongshu, *Theory of Conjugation for Reflecting Prisms: adjustment and image stabilization of optical instruments*. Beijing: International Academic Publishers-A Pergamon-CNPIEC Joint Venture 1991
- [4] Yishay Netzer, Line-of-sight steering and stabilization. *Opt. Eng.* 1982, **21**(1): 96
- [5] George R. Lewis, Image stabilization techniques for long range reconnaissance camera. *Proc. SPIE*, 1980, **242**: 153
- [6] David B. Fraser, Design of a low cost, High magnification, Passively stabilized monocular the stedi-eye. *Proc. SPIE*, 1973, **39**: 251

### Three-axis image-stabilizing reflecting prism assembly in convergent light

ZHAO YUEJIN      LIAN TONGSHU

(*Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081*)

(Received 29 July 1991; revised 25 October 1991)

#### Abstract

On the basis of conjugation theory for reflecting prisms, a method for image stabilization involving three degrees of freedom with only two prisms is proposed in convergent light, and its respective formula is deduced. With the help of optimization and computer the formula is optimized. A new way is offered for image-stabilizing involving more degrees of freedom.

**Key words** reflecting prisms, image-stabilizing, three-axis image-stabilizing reflecting prism assembly.