

# 真空态多光子 Jaynes-Cummings 模型中场的非经典性\*

周 鹏\*\*

(华中理工大学激光国家重点实验室, 武汉 430074, 湖北教育学院物理系, 武汉 430060)

## 提 要

研究了一初始处于原子相干态的二能级原子与真空场相互耦合的多光子 Jaynes-Cummings 模型中辐射场展示的亚泊松分布, 压缩和振幅平方压缩等非经典效应.

关键词 多光子 Jaynes-Cummings 模型, 非经典场.

## 1 引 言

关于 Jaynes-Cummings 模型(J-C 模型)<sup>[1]</sup>, 人们对原子和场的特性进行了很多研究<sup>[2~10]</sup>. 结果表明: J-C 模型及推广的 J-C 模型中场可展示某些非经典性, 且初始状态不同(如场最初处于热光场, 相干态, 原子初始处在基态, 激发态等), 其非经典特征也有很大差异<sup>[6~9]</sup>. 最近, Wodkiewicz 等讨论了真空态 J-C 模型中场的压缩效应<sup>[10]</sup>. 由于真空场广泛存在于实际的光学系统, 它与原子的耦合是普遍存在的; 而且被称为“量子极限”的真空涨落是判断场压缩特征的重要依据. 因此, 对这一问题的深入研究是有意义的. 本文将讨论真空态多光子 J-C 模型中场所展示的非经典效应.

## 2 场的非经典性

关于多光子 J-C 模型, 其哈密顿量可表为(此处已设  $\hbar=1$ )<sup>[5]</sup>,

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 s_3 + \varepsilon (s_+ a^K + a^{+K} s_-), \quad (1)$$

式中  $a^+$  和  $a$  是频率为  $\omega$  的单模场的产生和消灭算符;  $s_3$  和  $s_{\pm}$  为原子的能量和跃迁算符,  $\omega_0$  为其跃迁频率;  $\varepsilon$  为原子与场的耦合常数;  $K$  为原子每次跃迁吸收或发射的光子数.

如果  $t=0$  时刻, 场处在真空态  $|0\rangle$ , 而原子处于原子相干态<sup>[11]</sup>

$$|\eta\rangle = \cos(\theta/2) |-\rangle - \exp(i\phi) \sin(\theta/2) |+\rangle, \quad (0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi) \quad (2)$$

则体系演化到  $t>0$  时刻的状态为<sup>[9]</sup>,

$$\begin{aligned} |\varphi(t)\rangle &= \exp(-tHt) |\eta\rangle \otimes |0\rangle \\ &= \exp\left(i\frac{\omega K + \Delta}{2} t\right) \cos\frac{\theta}{2} \left| -, 0 \right\rangle + i \exp\left[-i\left(\frac{K}{2} \omega t - \phi\right)\right] \end{aligned}$$

收稿日期: 1991年2月12日; 收到修改稿日期: 1991年10月28日

\* 国家自然科学基金资助.

\*\* 中国高等科学技术中心(世界实验室).

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{\varepsilon \sqrt{K!}}{\Omega} \sin \frac{\theta}{2} \sin \Omega t | -, K \rangle \\ & - \exp \left[ -i \left( \frac{K}{2} \omega t - \phi \right) \right] \sin \frac{\theta}{2} \left( \cos \Omega t - i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \Omega t}{\Omega} \right) | +, 0 \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

式中  $\Delta = \omega_0 - K\omega$ ,  $\Omega = \left[ \left( \frac{\Delta}{2} \right)^2 + \varepsilon^2 K! \right]^{1/2}$ . 相应地, 体系中场算符的期待值为

$$\begin{aligned} \langle a^m \rangle &= \langle \varphi(t) | a^m | \varphi(t) \rangle \\ &= i \exp \left[ -i \left( K\omega t + \frac{\Delta}{2} t - \phi \right) \right] \frac{\varepsilon K!}{\Omega \sqrt{(K-m)!}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \Omega t \cdot \delta_{K,m} \\ & \quad (m=1, 2, \dots) \\ \langle (a^\dagger a)^m \rangle &= \frac{\varepsilon^2 K!}{\Omega^2} K^m \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \Omega t, \quad (m=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (4)$$

## 2.1 光子的亚泊松分布

光子的亚泊松分布一般由 Mandel 因子<sup>[1,2]</sup>

$$Q = \frac{\langle (\Delta N)^2 \rangle - \langle N \rangle^2}{\langle N \rangle} < 0, \quad (5)$$

来表示, 式中  $N = a^\dagger a$ . 对于真空态多光子 J-O 模型系统, Mandel 因子  $Q$  可表为

$$Q = K - 1 - K \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \sqrt{K!} \varepsilon t. \quad (6)$$

显然, 对真空态单光子 J-O 模型 ( $K=1$ ) 来说, 光子几乎总是 (除  $\varepsilon t = 0, \pi, 2\pi, \dots$ ) 呈亚泊松分布; 而当  $K \geq 2$  (真空态多光子 J-O 模型) 时, 只有  $t$  满足:

$$\begin{aligned} l\pi + \arcsin \left( \frac{\sqrt{(K-1)/K}}{\sin(\theta/2)} \right) < \sqrt{K!} \varepsilon t < (l+1)\pi - \arcsin \left( \frac{\sqrt{(K-1)/K}}{\sin(\theta/2)} \right), \\ (l=0, 1, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

时, 光子统计才呈现亚泊松分布, 而且随  $K$  的增大, 呈现亚泊松分布的时间变短. (6) 式还表明: 原子初始在激发态的几率  $\sin^2(\theta/2)$  也是影响亚泊松分布时间的一个重要因素. 对给定的  $K$ , 原子激发态占有率越大, 其呈现亚泊松分布的时间越长, 而原子的自发辐射 ( $\theta = \pi$ ) 给出光子的最佳亚泊松分布的时间演化:

$$\begin{aligned} Q &= K - 1 - K \sin^2 \sqrt{K!} \varepsilon t, \\ (l\pi + \arcsin \sqrt{(K-1)/K} < \sqrt{K!} \varepsilon t < (l+1)\pi - \arcsin \sqrt{(K-1)/K}, \\ l &= 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (8)$$

且  $\sqrt{K!} \varepsilon t = (l+1)\pi$  时, 场呈现最理想的量子态——光子数态.

## 2.2 场的压缩效应

通常意义下场的压缩性是依据场复振幅的实部和虚部

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (1/2) \{ a \exp[i(\omega t - \varphi)] + a^\dagger \exp[-i(\omega t - \varphi)] \}, \\ a_2 &= (1/2i) \{ a \exp[i(\omega t - \varphi)] - a^\dagger \exp[-i(\omega t - \varphi)] \}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

来讨论的, 若存在<sup>[7]</sup>

$$q_l = 4(\Delta a_l)^2 - 1 < 0, \quad (l=1 \text{ 或 } 2) \quad (10)$$

表明  $a_l$  分量的涨落被压缩,  $q_l$  的值反映了压缩程度. 为方便起见, 下面只以  $a_1$  为例 ( $a_1, a_2$  可通过  $\varphi \rightarrow \varphi + (\pi/2)$  而相互变换). 结合 (4)、(9) 和 (10) 式可得

$$q_1 = 2K \sin^2(\theta/2) \sin^2 \sqrt{K} st - \sqrt{2} \sin \theta \sin(\phi - 2\varphi) \sin \sqrt{2} st \delta_{K,2} - \sin^2 \theta \sin^2(\phi - \varphi) \sin^2 st \delta_{K,1}. \quad (11)$$

从(11)式不难看出:对于  $K \geq 3$  的真空态多光子 J-C 模型,  $q_1 \geq 0$ , 场不存在通常意义上的压缩效应. 然而  $K=1$  时, 文献[10]的结果已表明, 适当选取参数使得  $\cos^2(\theta/2) \sin^2(\phi - \varphi) > (1/2)$  时,  $a_1$  分量一直处于压缩状态, 且  $st = (\pi/2), (3\pi/2), \dots, \theta = (\pi/3), \phi - \varphi = (\pi/2)$  时,  $a_1$  呈最大压缩, 其程度为 25%. 而  $K=2$  时, (11)式则给出

$$q_1 = 4 \sin^2(\theta/2) \sin^2 \sqrt{2} st - \sqrt{2} \sin \theta \sin(\phi - 2\varphi) \sin \sqrt{2} st, \quad (12)$$

如果适当选取  $\theta, \phi$  和  $\varphi$ ,  $q_1$  可小于零. 以取  $0 < (\phi - 2\varphi) < \pi$  为例, 当  $0 < \sin \sqrt{2} st < (1/\sqrt{2}) \operatorname{ctg}(\theta/2) \sin(\phi - \varphi)$  时, 可获得  $a_1$  分量压缩的场, 不难看出, 其压缩时间取于  $\theta$  和  $(\phi - 2\varphi)$  若取  $(\phi - 2\varphi) = (\pi/2)$ , 则当  $\theta < \theta_0$  ( $\theta_0 = 2 \arccos \operatorname{ctg} \sqrt{2} = 1.23$ ) 时, 在  $2l\pi < \sqrt{2} st < (2l+1)\pi$ , ( $l=0, 1, 2, \dots$ ) 的时间范围内,  $a_1$  的涨落被压缩(如图 1(a)所示). 而当  $\theta \geq \theta_0$  时, 压缩出现在  $2l\pi < \sqrt{2} st < 2l\pi + \arcsin[(1/\sqrt{2}) \operatorname{ctg}(\theta/2)]$  和  $(2l+1)\pi - \arcsin[(1/\sqrt{2}) \operatorname{ctg}(\theta/2)] < \sqrt{2} st < (2l+1)\pi$ , ( $l=0, 1, 2, \dots$ ) 的时间内(如图 1(b)所示). 经过简单运算可知, 当  $\sqrt{2} st = [2l + (1/2)]\pi$ , ( $l=0, 1, 2, \dots$ ),  $\phi - 2\varphi = (\pi/2)$  和  $\theta = 0.615$  时,  $a_1$  的涨落被压缩到最小, 其压缩程度为 45%.

图 1 表明, 当  $0 < (\phi - 2\varphi) < \pi$  时,  $a_1$  的涨落在其演化过程中, 压缩出现在一个周期( $\sqrt{2}\pi/\varepsilon$ )的前半周期内, 其压缩时间的长短取决于系统的初始状态和原子与场的耦合常数  $\varepsilon$ .

如果取  $\pi < (\phi - 2\varphi) < 2\pi$  时, 结果与上面类似, 只是压缩出现在后半周期内.

另一方面, (11)式表明, 不论是原子的单光子或双光子自发辐射, 都不可能产生压缩的场, 尽管此时场的光子统计呈现最佳亚泊松分布.

比较  $K=1$  和  $K=2$  的 J-C 模型, 二者都存在压缩效应, 但前者存在压缩的时间长, 压缩程度较小, 后者压缩的时间短, 压缩程度较大.

### 2.3 场的振幅平方压缩效应

振幅平方压缩是 Hillary<sup>[13]</sup> 依据场复振幅平方的实部和虚部

$$\left. \begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2} \{a^2 \exp[2i(\omega t - \varphi)] + a^{+2} \exp[-2i(\omega t - \varphi)]\}, \\ Y_2 &= \frac{1}{2i} \{a^2 \exp[2i(\omega t - \varphi)] - a^{+2} \exp[-2i(\omega t - \varphi)]\}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

而引入的又一非经典效应. 若存在<sup>[13]</sup>

$$\langle (\Delta Y_l)^2 \rangle < \langle a^+ a + (1/2) \rangle, \quad (l=1 \text{ 或 } 2) \quad (14)$$

此时的场具有振幅平方压缩特性. 定义参量<sup>[14]</sup>

$$V_l = \frac{\langle (\Delta Y_l)^2 \rangle - \langle a^+ a + (1/2) \rangle}{\langle a^+ a + (1/2) \rangle}, \quad (l=1, 2) \quad (15)$$

$-1 < V_l < 0$  表征振幅平方压缩效应.  $V_l$  的大小反映了振幅平方压缩的程度. 下面仍以  $Y_1$  分量为例. 对本文研究的系统, 不难求出

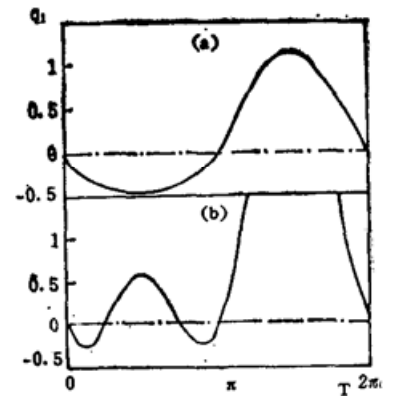


Fig. 1  $q_1$  vs  $T = \sqrt{2}st$  with  $\phi - 2\varphi = \pi/2$   
(a)  $\theta = 0.615 < \theta_0$   
(b)  $\theta = 1.57 > \theta_0$

$$V_1 = \left[ \frac{K(K-1)}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \sqrt{K} st - \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \theta \sin(\phi - 4\varphi) \sin \sqrt{24} st \delta_{K,4} - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \sin^2(\phi - 2\varphi) \sin^2 \sqrt{2} st \delta_{K,2} \right] / \left( K \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \sqrt{K} st + \frac{1}{2} \right). \quad (16)$$

显然, 当  $K \neq 2$  和  $4$  时,  $V_1(V_2) \geq 0$ , 这表明除双光子和四光子 J-C 模型以外, 其他真空态 J-C 模型不存在振幅平方压缩效应. 而  $K=2$  时, (15) 给出

$$V_1 = \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \sqrt{2} st \left[ 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2(\phi - 2\varphi) \right] / \left( 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \sqrt{2} st + \frac{1}{2} \right). \quad (17)$$

(17) 式表明, 只要选取  $\theta$ ,  $\phi$  和  $\varphi$  满足  $\cos^2(\theta/2) \sin^2(\phi - 2\varphi) > (1/2)$ . 总有  $V_1 < 0$ , 即场一直处于振幅平方压缩状态, 而最大压缩由  $\sqrt{2} st = [l + (1/2)]\pi$ , ( $l=0, 1, 2, \dots$ ),  $\phi - 2\varphi = \pi/2$  和  $\theta = 0.884$  给出, 其程度为 13.4%.

对四光子 J-C 模型来说,  $V_1$  为

$$V_1 = \left[ 6 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \sqrt{24} st - \sqrt{6} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin(\phi - 4\varphi) \sin \sqrt{24} st \right] / \left( 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \sqrt{24} st + \frac{1}{2} \right). \quad (17)$$

适当选取  $\theta$  和  $\phi - 4\varphi$ , 可获振幅平方压缩效应. 以  $0 < (\phi - 4\varphi) < \pi$  为例, 当  $0 < \sin \sqrt{24} st < (1/\sqrt{6}) \operatorname{ctg}(\theta/2) \sin(\phi - 4\varphi)$  时, 场呈振幅平方压缩, 其压缩的时间取决于  $\theta$  和  $\phi - 4\varphi$  如取  $(\phi - 4\varphi) = (\pi/2)$ , 当  $\theta < \theta'_0$  ( $\theta'_0 = 2 \arccos \operatorname{ctg} \sqrt{6} = 0.775$ ) 时, 压缩的时间范围为  $2l\pi < \sqrt{24} st < (2l+1)\pi$ , ( $l=0, 1, 2, \dots$ ); 而  $\theta \geq \theta'_0$  时, 压缩的时间则为

$$2l\pi < \sqrt{24} st < 2l\pi + \arcsin [\operatorname{ctg}(\theta/2) / \sqrt{6}]$$

和  $(2l+1)\pi - \arcsin [\operatorname{ctg}(\theta/2) / \sqrt{6}] < \sqrt{24} st < (2l+1)\pi$ , ( $l=0, 1, 2, \dots$ ). 这与双光子 J-C 模型的通常意义下场的压缩时间范围有些类似. 如果取  $\sqrt{24} st = [2l + (1/2)]\pi$ , ( $l=0, 1, 2, \dots$ ),  $(\phi - 4\varphi) = (\pi/2)$  和  $\theta = 0.314$  时, 场的  $V_1$  分量呈最佳振幅平方压缩效应, 其程度为 38.7%.

从本文的结果可知, 真空态四光子 J-C 模型与双光子 J-C 模型相比, 其场的振幅平方压缩效应的时间比较短, 但压缩程度则较深. 另一方面, 真空态四光子 J-C 模型的场并不呈现通常意义下的压缩效应, 但却可展示振幅平方压缩效应.

## 2.4 小结

本文研究了真空场与原子相互作用的多光子 J-C 模型中辐射场的某些非经典特性, 从某种意义上说: J-C 模型相当于一个非线性变换器, 将真空场转变成某种非经典场. 其结果表明:

- 1) 真空态多光子 J-C 模型中场可呈现目前讨论的所有非经典效应, 且这些效应是彼此独立的.
- 2) 光子的亚泊松分布与原子和场的相位  $\phi$  和  $\varphi$  无关, 而场的压缩和振幅平方压缩效应则依赖于  $\phi$  和  $\varphi$ .
- 3) 原子的自发辐射场不展示压缩和振幅平方压缩效应, 但其光子统计却呈最佳亚泊松分布.

## 参 考 文 献

- [1] E. T. Jaynes, F. E. Cummings, *Proc. IEEE*, 1963, **51** (1): 89~109  
[2] N. B. Narozhny, J. J. Sanchez-Mondragon *et al.*, *Phys. Rev. (A)*, 1981, **23** (1): 236~247  
[3] P. L. Knight, P. M. Radmore, *Phys. Lett. (A)*, 1982, **90** (7): 342~346  
[4] P. Zhou, J. S. Peng, *Phys. Rev. (A)*, 1991, **44** (5): 3331~3335  
[5] C. V. Sukumar, B. Buck, *Phys. Lett. (A)*, 1981, **83** (5): 211~213  
[6] M. Millery, *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35** (10): 4186~4191  
[7] A. S. Shumovsky, F. L. Kien *et al.*, *Phys. Lett. (A)*, 1987, **124** (6, 7): 351~354  
[8] S. Y. Zhu, M. O. Scully, *Phys. Lett. (A)*, 1988, **130** (2): 101~103  
[9] 周 鹏, 彭金生. 光学学报, 1990, **10** (9): 837~844  
[10] K. Wodkiewicz, P. L. Knight *et al.*, *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35** (6): 2567~2577  
[11] K. Wodkiewicz, J. H. Eberly, *J. O. S. A. (B)*, 1985, **2** (3): 458~466  
[12] L. Mandel, *Opt. Lett.*, 1979, **4** (3): 205~209  
[13] M. Hillery, *Phys. Rev. (A)*, 1987, **36** (8): 3796~3802  
[14] 周 鹏, 彭金生. 科学通报, 1991, **36** (8): 585~589

## Nonclassical effects of the field in the vacuum-state multiphoton Jaynes-Cummings model

ZHOU PENG

(National Laboratory of Laser, Huazhong University of Science & Technology, Wuhan 430074)

(Department of Physics, Hubei College of Education, Wuhan 430060)

(Received 12 February 1991; revised 28 October 1991)

### Abstract

The nonclassical effects, such as Sub-poisson distribution, squeezing and amplitude-squared squeezing, of the field in the multiphoton Jaynes-Cummings model of an atom initially in the atomic coherent state coupling with the vacuum field are investigated.

**Key words** multiphoton Jaynes-Cummings model, nonclassical field.