

# 计算机制全息图的二值化噪声及取样影响\*

龙 品 陈柏刚 刘 杰 徐大雄

(北京邮电学院应用物理系, 北京 100088)

## 提 要

对于超大规模集成电路光学互连的计算机制全息图(CGH)的量化噪声及取样影响进行了分析。CGH透过率函数的二值化将带来一些噪声,但仍可得到高的信噪比。在光学互连CGH的结构是非涅耳波带片的条件下,对Nyquist和Whittaker-Shannon两种取样方法进行了分析和比较。结果表明,在小偏转角和高取样频率条件下,用Whittaker-Shannon取样方法得到的衍射效率比用Nyquist取样方法所得到的衍射效率大。

关键词 计算机制全息图, 光学互连。

## 1 引 言

超大规模集成电路(VLSI)中的光学互连要求很高的互连密度<sup>[1]</sup>。光学互连的容量与光源、探测器和探测电路以及全息光学元件有关<sup>[2]</sup>。

对于大容量的光学互连,全息光学元件(HOE)的高衍射效率十分重要,所以相位型计算全息图或相息片是较合适的互连元件<sup>[3]</sup>。相息片理论上可达到100%的衍射效率。为了利用VLSI制造工艺,全息图须采用二值化的相位值<sup>[4]</sup>。增加相位级数,将提高衍射效率,但制造工艺的难度也将增大<sup>[5,6]</sup>。全息图相位的二值化使最大衍射效率降至40%,同时带来了一些噪声<sup>[8]</sup>。本文首先考虑了CGH二值化引起的噪声。分析结果表明,噪声对光学互连的影响非常小,在探测器平面内仍可得到高的信噪比。在CGH的制造过程中,通常有两种取样方法,即Nyquist取样<sup>[3]</sup>和Whittaker-Shannon取样<sup>[9]</sup>。在CGH是一个子全息图的结构(一对一连接)或多个子全息图的结构(一对多连接),且子全息图为菲涅耳波带片(FZP)的情况下,对以上两种取样方法进行了分析和比较。

## 2 CGH 二值化的噪声

假设  $U(x, y)$  代表全息图的透过率函数,

$$U(x, y) = A_0 \exp[j\phi(x, y)], \quad (1)$$

将  $\phi(x, y)$   $N$  级量化得  $\phi^*(x, y)$ , 有<sup>[7]</sup>:

$$\exp[j\phi^*(x, y)] = \sum_m \text{sinc}(m+1/N) \cdot \exp[j(Nm+1)\phi(x, y)]. \quad (2)$$

为简单起见,假设CGH只含有一个子全息图,并假设子全息图为FZP,则

$$\phi(x, y) = \pi[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]/(\lambda z_0), \quad (3)$$

\* 收稿日期: 1991年4月30日; 收到修改稿日期: 1991年9月23日

\* 国家自然科学基金和邮电部青年科学基金资助的项目。

$x, y$  为 CGH 平面的坐标轴,  $x_0, y_0$  为 VLSI 平面上探测器的坐标,  $z_0$  为 CGH 平面和 VLSI 平面之间的距离(见图 1).

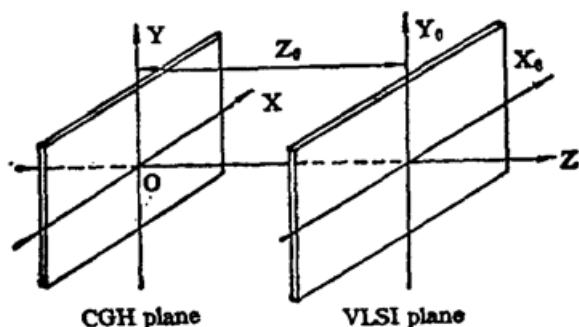


Fig. 1 Configuration of optical interconnection for VLSI

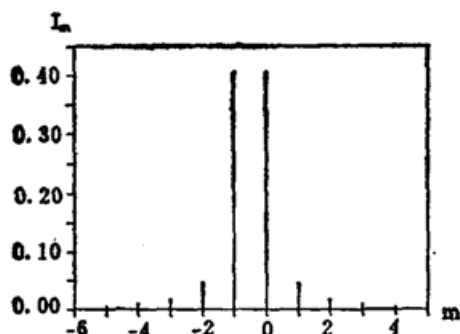


Fig. 2 Light intensity of signal wave vs order  $m$ , for binarization ( $N=2$ )

当  $N=2$  时, 全息图的透过率函数为

$$u(x, y) = A_0 \sum_m \text{sinc}(m+1/2) \cdot \exp[j(2m+1)\phi(x, y)], \quad (4)$$

当  $m=0$  时信号光波的强度  $I_0$  为

$$I_0 = [\sin(\pi/2)/(\pi/2)]^2 = 0.4. \quad (5)$$

图 2 显示了各衍射级的光强  $I_m$  的分布曲线.

由图 2 可知, 噪声主要来自当  $m = +1, -1, -2$  时的衍射级.

当  $m = +1$  时, 噪声强度为

$$I_{+1} = \left\{ \sin \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\right) \pi \right] / \left[ \left(1 + \frac{1}{2}\right) \pi \right] \right\}^2 = 0.045, \quad (6)$$

它的相位函数为

$$\begin{aligned} & \exp\{j\pi(2+1)[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]/(\lambda z_0)\} \\ & = \exp\{j\pi[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2]/(\lambda z_0/3)\}. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(7)可知, 这是一个球面波. 它先会聚在点  $(x_0, y_0, z_0/3)$ , 后变成发散. 当它到达 VLSI 平面时, 原来很小的幅度变得更小. 假设到达 VLSI 平面时, 该球面波的所有光能都均匀分布在一个光锥里, 且锥角为  $90^\circ$ , 则它投射在 VLSI 平面上的圆形区域半径为

$$R = \frac{2}{3} \cdot z_0 \cdot \tan 45^\circ = \frac{2}{3} z_0. \quad (8)$$

假设 VLSI 平面上光探测器表面积为  $10 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$ , FZP 的焦距  $z_0$  为  $10 \text{ mm}$ , 则 VLSI 平面上的信噪比为

$$SNR_{+1} = \frac{0.45}{10 \times 10} : \frac{0.045}{\pi R^2} = \frac{0.45}{10^2} : \frac{0.045}{\pi \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 10^4\right)^2} \approx 10^7:1. \quad (9)$$

用同样的分析方法可得出  $-1$  级和  $-2$  级衍射光波在 VLSI 平面上产生的噪声很小, 信噪比都大于  $10^7:1$ .

当  $m < -2$  时, 所有信号  $I_m$  都为发散球面波, 幅度比  $I_{-1}$  小. 当  $m > +1$  时, 所有  $I_m$  都为会聚的球面波, 幅度比  $I_{+1}$  小. 即使所有噪声叠加起来, 信噪比至少大于  $10^6:1$ .

通过以上分析可看出, 虽然 CGH 透过率函数的二值化将带来一些噪声, 但仍可得到高的信噪比.

### 3 取样的影响

在 VLSI 的光学互连中, 希望得到最大衍射效率和最大偏转角, 以实现最大的互连密度. 最大衍射效率取决于量化和取样效果<sup>[3,8]</sup>.

为了估算不同的取样频率和不同的 CGH 最大偏转角对衍射效率的影响, 在假定全息图由一个或多个同轴 FZP 或离轴 FZP 子全息图构成的情况下, 对 Nyquist 和 Whittaker-Shannon 两种取样方法进行了分析和比较.

#### 3.1 Nyquist 取样<sup>[3]</sup>

假设全息图的透过率函数为  $H(x, y)$ , 取样之后, 透过率函数变为

$$G(x, y) = \frac{1}{\delta_x \delta_y} \cdot \left[ H(x, y) \cdot \text{comb}\left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{y}{\delta_y}\right) \right] \otimes \text{rect}\left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{y}{\delta_y}\right), \quad (10)$$

式(10)中  $1/\delta_x, 1/\delta_y$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的取样频率.  $\otimes$  代表卷积, 且

$$\text{comb}(a, b) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(a-m) \times \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(b-n), \quad (11)$$

为得到衍射效率同取样频率的关系, 对  $G(x, y)$  进行傅里叶变换.  $g(u, v)$  代表  $G(x, y)$  的傅里叶变换式,  $h(u, v)$  代表  $H(x, y)$  的傅里叶变换式, 则

$$\begin{aligned} g(u, v) &= \delta_x \delta_y \cdot \text{sinc}(u\delta_x) \cdot \text{sinc}(v\delta_y) \cdot [h(u, v) \otimes \text{comb}(u\delta_x, v\delta_y)] \\ &= \text{sinc}(u\delta_x) \cdot \text{sinc}(v\delta_y) \cdot \sum \sum h(u-n/\delta_x, v-m/\delta_y), \end{aligned} \quad (12)$$

傅里叶变换的零级为

$$g_0(u, v) = \text{sinc}(u\delta_x) \cdot \text{sinc}(v\delta_y) \cdot h(u, v). \quad (13)$$

衍射效率  $\eta$  为

$$\eta = \frac{\iint \text{sinc}^2(u\delta_x) \cdot \text{sinc}^2(v\delta_y) \cdot |h(u, v)|^2 du dv}{\iint |h(u, v)|^2 du dv}. \quad (14)$$

在取样时, 作如下近似

$$|h(u, v)|^2 \approx \begin{cases} 1 & |u| < \delta_u \text{ 和 } |v| < \delta_v \text{ 时,} \\ 0 & \text{其它.} \end{cases} \quad (15)$$

式中  $u$  和  $v$  分别是在  $x$  和  $y$  方向上  $H(x, y)$  的频谱带宽. 在此近似下可得

$$\eta = \frac{1}{2\delta_u} \cdot \int_{-\delta_u}^{+\delta_u} \text{sinc}^2(u\delta_x) du \cdot \frac{1}{2\delta_v} \cdot \int_{-\delta_v}^{+\delta_v} \text{sinc}^2(v\delta_y) dv. \quad (16)$$

当全息图为同轴 FZP 时, 透过率函数的带宽为<sup>[10]</sup>

$$\delta_u = X_{\max}/(\lambda F), \quad \delta_v = Y_{\max}/(\lambda F). \quad (17)$$

式中  $X_{\max}, Y_{\max}$  分别为全息图在  $x, y$  方向上的半宽度,  $F$  为焦距. 在 VLSI 光学互连中,  $X_{\max}$  和  $Y_{\max}$  由光源的发散角决定, 关系如下

$$X_{\max}/2F = \tan\left(\frac{\phi_x}{2}\right), \quad Y_{\max}/2F = \tan\left(\frac{\phi_y}{2}\right). \quad (18)$$

式中  $\phi_x, \phi_y$  分别为光源在  $x, y$  方向上的发散角.

离轴 FZP 全息图的半带宽为<sup>[10]</sup>

$$\delta_u = X_{\max}/(\lambda F) + X_0/(\lambda F) = 2 \tan\left(\frac{\phi_x}{2}\right)/\lambda + 2 \tan\left(\frac{\theta_x}{2}\right)/\lambda, \quad (19)$$

$$\delta_v = Y_{\max}/(\lambda F) + Y_0/(\lambda F) = 2 \tan\left(\frac{\phi_v}{2}\right)/\lambda + 2 \tan\left(\frac{\theta_v}{2}\right)/\lambda. \quad (20)$$

式中  $\theta_x, \theta_y$  分别为全息图在  $x, y$  方向上的最大偏转角.  $X_0, Y_0$  分别为在 VLSI 平面  $x, y$  方向上的偏转距离.  $X_0/2F = \tan(\theta_x/2)$ ,  $Y_0/2F = \tan(\theta_y/2)$ . 半导体激光器输出光一般发散成圆锥形, 其在  $x, y$  方向的发散角分别为  $15^\circ$  和  $30^\circ$ . 由此可得

$$X_{\max}/F = 2 \tan(\phi_x/2) = 0.26. \quad (21)$$

$$Y_{\max}/F = 2 \tan(\phi_y/2) = 0.54. \quad (22)$$

由式(16)可得图 3. 该图表明了衍射效率同最大偏转角、最大取样频率的关系.  $\delta_u$  和  $\delta_v$  由式(19)、(20)定义.

图 3 表明在  $\phi_x = \phi_y, \delta_x = \delta_y$  的条件下,  $\eta$  和  $1/\delta_x$  的关系.  $1/\delta_x$  增大, 衍射效率增大. 偏转角增大, 衍射效率降低.

### 3.2 Whittaker-Shannon 取样<sup>[9]</sup>

经 Whittaker-Shannon 取样后, 全息图的透过率函数变为

$$G(x, y) = \left[ \text{comb}\left(\frac{x}{\delta_x}, \frac{y}{\delta_y}\right) \cdot H(x, y) \right] \cdot a(x, y). \quad (23)$$

式中  $a(x, y)$  为滤波器的脉冲响应函数, 它的表达式为

$$\begin{aligned} a(x, y) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left[\frac{u}{2\delta_u}\right] \cdot \text{rect}\left[\frac{v}{\delta_v}\right] \cdot \exp[j2\pi(xu + vy)] du dv \\ &= (4\delta_u\delta_v) \cdot \text{sinc}(2\delta_u\delta_x) \cdot \text{sinc}(2\delta_v\delta_y). \end{aligned} \quad (24)$$

经过与 Nyquist 取样同样的处理, 可得衍射效率  $\eta$ <sup>[8]</sup>

$$\eta = \frac{\iint \text{rect}^2[u/(2\delta_u)] \cdot \text{rect}^2[v/(2\delta_v)] \cdot |h(u, v)|^2 du dv}{\iint |h(u, v)|^2 du dv} \quad (25)$$

为找到衍射效率同最大偏转角、最小取样频率的关系, 根据式(15)、(19)和(20), 得到图 4. 图 4 表明在  $\phi_x = \phi_y, \delta_x = \delta_y$  的条件下  $\eta$  同  $1/\delta_x$  的关系. Whittaker-Shannon 取样频率增加, 衍射效率增加. 偏转角  $\phi_x$  增加, 衍射效率降低.

通过图 3、图 4 可比较 Nyquist 和 Whittaker-Shannon 两种取样方法. 比较结果表

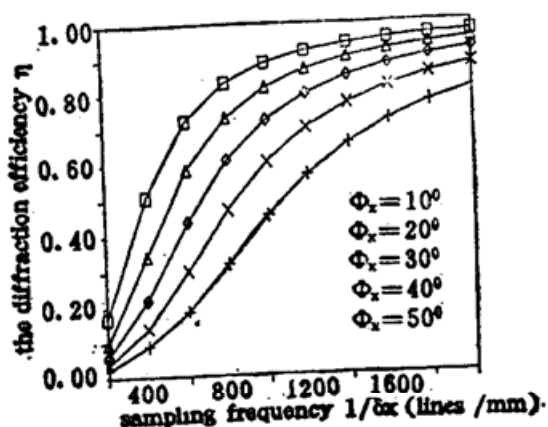


Fig. 3 Plots of the diffraction efficiency  $\eta$  due to sampling vs sampling frequency  $1/\delta_x$  for  $\phi_x = \phi_y, \delta_x = \delta_y$  when using Nyquist sampling

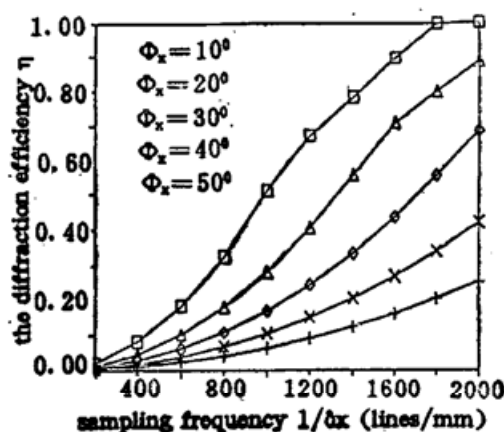


Fig. 4 Plots of the diffraction efficiency  $\eta$  due to sampling vs sampling frequency  $1/\delta_x$  for  $\phi_x = \phi_y, \delta_x = \delta_y$  when using Whittaker-Shannon sampling

明, 在小偏转角和高取样频率的条件下, Whittaker-Shannon 取样所得的衍射效率高于 Nyquist 取样. 在大偏转角、低取样频率的条件下, Nyquist 取样所得的衍射效率高于 Whittaker-Shannon 取样.

**讨论和结论** 本文分析了 OGH 透过率函数的二值化带来的噪声. 分析结果表明, 尽管存在一些噪声, 仍可得到高的信噪比.

本文还分析比较了 Nyquist 和 Whittaker-Shannon 两种取样方法. 在全息图由一个或多个同轴 FZP 或离轴 FZP 子全息图组成的条件下, 分析了衍射效率同最大偏转角和取样频率的关系. 结果表明, 当偏转角减小或取样频率增高时, 衍射效率增加. 在小偏转角和高取样频率条件下, 采用 Whittaker-Shannon 取样方法得到的衍射效率要高一些.

### 参 考 文 献

- [1] M. R. Feldman, C. O. Guest, *Appl. Opt.*, 1989, **28** (15): 3134~3137
- [2] R. K. Kostuk, J. W. Goodman *et al.*, *Appl. Opt.*, 1987, **26** (18): 3947~3953
- [3] M. R. Feldman, C. O. Guest, *Appl. Opt.*, 1987, **26** (20): 4377~4384
- [4] L. M. Bergman *et al.*, *Opt.*, 1986, **25** (10): 1109~1113
- [5] H. Anderson *et al.*, *Proc. SPIE*, 1989, **1136**: 45~52
- [6] Jurgen Tahns, Norbert Streible *et al.*, *Proc SPIE*, 1989, **1052**: 198~203
- [7] W. J. Dallas, *Appl. Opt.*, 1971, **10** (3): 673~676
- [8] Long Pin, Hsu Dahsiung, *SPIE/SPIE's Electronic Imaging Science & Technology*, San Jose, Califo.: 1991
- [9] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*, New York: McGraw-Hill, 1968: 23~28
- [10] R. J. Collier, *Optical Holography*. New York: Academic Press, 1971: 54~74

## Binarizing distortions and sampling effects of computer generated hologram

LONG PIN CHEN BAIGANG LIU JIE XU DAXIONG

(Department of Applied Physics, Beijing University of Posts & Telecommunications, Beijing 100088)

(Received 30 April 1991; revised 23 September 1991)

### Abstract

The binarizing distortions and sampling effects of computer generated hologram (CGH) for optical interconnection of very large scale integrated circuits (VLSI) are analyzed. Binarization of transmittance function of CGH will bring some noises but high signal-noise-ratio in detector plane will be achieved. Two kinds of sampling methods, Nyquist sampling and Whittaker-Shannon sampling are analyzed and compared, in the condition that CGH in the form of Fresnel zone plate is employed as diffractive or reflective optical interconnection element.

**Key words** computer generated hologram, optical interconnection.