

# 分层校正自适应光学等晕区计算

阎吉祥 周仁忠 俞 信

(北京理工大学工程光学系, 北京 100081)

## 提 要

在回顾单层模型与多层模型的基础上, 首次导出按适当准则分层的大气等晕角普遍表达式, 并将贝克先前的结果作为一种特例包括在内。

关键词: 自适应光学、等晕、分层校正。

## 一、引 言

由于宽视场问题对自适应光学系统能否得到广泛应用起着决定作用, 所以, 长期以来一直为该领域的专家们所关注。由欧洲南方天文台的贝克(Beckers)最先提出的分层校正方案, 关键是设想将湍流大气分成若干层, 并用多层反射镜分别校正不同大气层所引起的光波畸变。然而人们一度认为, 由于每个校正镜都需要很多子单元, 分层校正的结果会导致子单元总数成比例大幅度地增加而使系统变得过份复杂, 因而, 这一构想至今未能实现。

在两年前举行的国际光学工程学会(SPIE) 1989年航天传感技术讨论会上, 贝克重新分析了这一技术, 指出分层校正时每子层大气相关长度比不分层情况下总相关长度大得多, 因而, 每子层对应的校正镜所需单元数将比不分层大气对应的校正镜所需单元数少得多, 以致两种情况的总单元数大体相等, 而等晕区则将随着层数的增加而显著增大。当大气被分为 $N$ 层时, 等晕区直径扩大 $2N$ 倍, 而面积扩大 $4N^2$ 倍<sup>[1]</sup>。

贝克在得到上述结果时, 假定了折射率结构系数 $C_n^2$ 在 $0\sim 10$  km的高度范围为常数( $2\times 10^{-17} \text{ m}^{-2/3}$ ), 而在高于10公里处为0。这种条件在现实中当然是永远不会满足的, 实际大气的 $C_n^2(h)$ 是高度或路径的函数。本文依据人们普遍接受的分层准则, 首次导出了大气分层与不分层的等晕角之间的关系。作为特例, 假定 $C_n^2$ 为常数时, 得到与文献[1]完全一致的结果。

## 二、单层大气的等晕角

根据柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出的局地各向同性湍流理论, 平面波前的相位空间结构函数为<sup>[2]</sup>

$$D_\phi(\rho) = A\rho^{5/3}, \quad (1)$$

其中 $\rho = |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ , 而 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 为空间两点的位矢。

$$A = 2.91 k^2 \int_0^L C_n^2(h) dh, \quad (2)$$

式中  $k = (2\pi/\lambda)$  为波数, 积分沿着从目标到接收器的路径。将(2)式代入(1)式, 得到

$$D_\phi(\rho) = 6.88 (\rho/r_0)^{5/3}, \quad (\text{rad})^2, \quad (3)$$

其中,

$$r_0 = \left[ 0.423 k^2 \int_0^L C_n^2(h) dh \right]^{-3/5}$$

为大气相关长度, 由弗雷德(Fried)首先引入, 故又称为弗雷德常数。它是大气光学中一个至关重要的参数。在好的宁静度条件下,  $r_0 = 15 \text{ cm}$  一般条件下  $r_0 \leq 10 \text{ cm}$ , 根据有关资料, 算得美国毛伊岛(Maui)光学站白天的  $r_0 \approx 0.07 \text{ m}$ , 而云南昆明地区10月份(数年)的平均气象条件下  $r_0 \approx 0.08 \text{ m}$ 。由(3)式立即得到, 在平面波光场中相距为  $\rho$  的两点之间相位差均方根用波长表示为

$$\langle [\phi(\mathbf{x}_1) - \phi(\mathbf{x}_2)]^2 \rangle^{1/2} = 0.42 (\rho/r_0)^{5/6} \lambda. \quad (4)$$

弗雷德定义在高度  $h$  处使(4)式均方根值等于  $0.157 \lambda$  的角度<sup>[3]</sup>为等晕角  $\Omega$ , 如图1所示, 即令

$$0.42 (\rho/r_0)^{5/6} \lambda = 0.157 \lambda, \quad (5)$$

由此得到  $\rho = 0.31 r_0$ , 由图1知

$$\Omega = 0.62 r_0/h, \quad (6)$$

其中  $h$  是湍流层高层, 可见湍流层越高,  $\Omega$  越小。单扩展层等晕角

$$\Omega = 0.62 r_0/\bar{h}, \quad \left. \bar{h} = \left[ \frac{\int_0^\infty h^{5/6} C_n^2(h) dh}{\int_0^\infty C_n^2(h) dh} \right]^{6/5} \right\} \quad (7)$$

$\bar{h}$  为平均高度。

### 三、分层大气的等晕角

在大气分层的情况下, 等晕角的大小由每层内所允许的光路横向位移, 即  $\pm h_i \omega_i/4$  决定 ( $\omega_i$  为第  $i$  层的等晕角)。总位移则应等于用波长表示的最大允许波前均方根误差(即  $0.157 \lambda$ ), 当此位移量对  $N$  层平均分配时,  $\omega_i$  为定值, 而每层允许的波前误差为总误差的  $1/\sqrt{N}$  倍, 亦即  $0.42 (\rho_i/r_{0i})^{5/6} \lambda = 0.157 \lambda / \sqrt{N}$  得

$$\rho_i = 0.31 r_{0i} N^{-3/5}, \quad \text{或} \quad (\omega_i h_i/4) = 0.62 r_{0i} N^{-3/5}. \quad (8)$$

于是, 每层的高度  $h_i = (4/\omega_i) 0.62 r_{0i} N^{-3/5}$ 。由此得

$$\sum_{i=1}^N h_i^{-5/3} = (4 \times 0.62)^{-5/3} N \omega_i^{5/3} \sum_{i=1}^N r_{0i}^{-5/3} = (4 \times 0.62)^{-5/3} N \omega_i^{5/3} r_0^{-5/3}. \quad (9)$$

将(7)式代入, 便可得到

$$\sum_{i=1}^N h_i^{-5/3} = 4^{-5/3} N (\omega_i/\Omega \bar{h})^{5/3},$$

或

$$\omega_i^{5/3} = 4^{5/3} N^{-1} (\Omega \bar{h})^{5/3} \sum_{i=1}^N h_i^{-5/3},$$

亦即

$$\omega_i = 4N^{-3/5} \bar{h} \left( \sum_{i=1}^N h_i^{-5/3} \right)^{3/5} \Omega_0 \quad (10)$$

(10)式是本文的主要结果, 这个方程表明, 分层校正等晕区的直径与不分层的比为

$$4N^{-3/5} \bar{h} \left( \sum_{i=1}^N h_i^{-5/3} \right)^{3/5} = 4 \left[ \sum_{i=1}^N \frac{(\bar{h}/h_i)^{5/3}}{N} \right]^{3/5},$$

而相应的面积比为  $16 \left[ \sum_{i=1}^N \frac{(\bar{h}/h_i)^{5/3}}{N} \right]^{6/5}$ 。

把以上结果应用于贝克的例子, 由于假定  $C_n^2(h)$  为常数, 所以, 为使各层  $\omega_i$  相等, 必须且只需按等高分层。于是  $\bar{h} = h/2$ ,  $h_i = h/N$ 。代入(10)式得到

$$\omega_i = 2N\Omega_0 \quad (11)$$

这正是贝克所得到的结果。

## 四、结 论

将大气分为  $N$  层, 使每层引起的波前均方根误差相等, 并为总的最大允许波前均方根误差的  $N^{-1/2}$  倍, 由此得到等晕角为不分层时的  $4N^{-3/5} \left[ \sum_{i=1}^N (\bar{h}/h_i)^{5/3} \right]^{3/5}$  倍, 令  $C_n^2(h)$  为常数, 因而按等高分层, 则等晕角为不分层时的  $2N$  倍, 与贝克的结论完全吻合。

- [1] J. M. Beckers; «ESO Conference on Very Large Telescopes and Their Instrumentation» (Garching, Germany, May, 1988), 693~703.  
 [2] D. W. Hanson; «Reduction of Anisoplanatic Error», In-House Report, 1981, AD-A106689, 37.  
 [3] D. L. Fried; *J. O. S. A.*, 1982, **72** (1), 52~61.

## Calculation of isoplanatic angle for multilayer correcting adaptive optics

YAN JIXIANG, ZHOU RENZHONG AND YU XIN

(Department of Engineering Optics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081)

(Received 21 October 1991)

### Abstract

Based on review of the single layer and multilayer models, a general formula of the isoplanatic angle for multilayer atmosphere is presented, which includes the result from Beckers as a particular one.

**Key words:** adaptive optics, isoplanatic, multilayer correct.