

双折射波片用于发散光束 的偏振像差分析

李国华 肖胜安 李继仲

(曲阜师范大学激光研究所, 曲阜 273165)

提 要

本文利用光线追迹法,对双折射波片用于发散光束的偏振像差进行了分析,并以标准1/4波片为例,给出了小角入射时的近似处理方法。

关键词: 双折射波片、偏振像差、相位延迟。

一、引 言

双折射波片是偏光技术中的重要器件之一,1/4波片是实现线偏光-圆偏光相互转换的重要器件。当波片用于发散光束时(如在偏光显微镜中),各光线入射角,入射面不同,经过波片的光程也不同,其出射光束的偏振状态分布不均匀,形成了偏振像差。偏振像差对成像质量、光学系统测量精度都有一定的影响,已经受到人们越来越多的关注^[1,2]。本文利用光线追迹法,在固定坐标系中(以光轴与晶面法线为坐标轴)推出 o 、 e 光线的传播方向,给出了任意空间光线入射时,波片相位延迟量的严格计算式,最后,以石英标准1/4波片为例,在小角入射情况下进行了偏振像差分析的二级近似处理。

二、 o 、 e 光波的光线方向

双折射波片的光轴平行于晶面。取晶面法向矢为 x 轴,光轴为 z 轴,建立坐标系如图1。

设入射光线的方向矢为 $(\cos \theta_1, \sin \theta_1 \sin \varphi, \sin \theta_1 \cdot \cos \varphi)$,其中 θ_1 为入射角, φ 为入射面的方位角。光线进入晶体后分成 o 光和 e 光, o 光的传播规律与各向同性介质中的情况一致; e 光的传播情况比较复杂。

设 o 光的折射角为 θ_o , e 光的波法线 \mathbf{k}_e 与晶面法线 \mathbf{N} 的夹角为 θ_e 。由Kinematic条件(即推广的斯涅耳定律)得到^[3]

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta_1 &= n_o \sin \theta_o = n \sin \theta_e, \\ n &= n_o n_e (n_e^2 \cos^2 \theta + n_o^2 \sin^2 \theta)^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

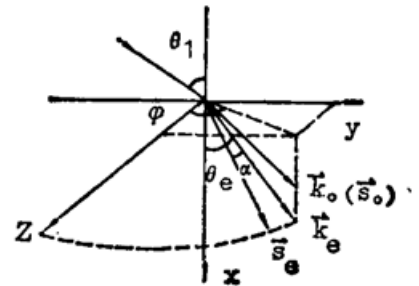


Fig. 1 Diagram of normal and ray vectors of refracted wave as a ray of light falls on the crystal surface

式中 n 为 e 光波的折射率, n_o 、 n_e 为晶体对 o 、 e 光的两个主折射率, θ 为 \mathbf{k}_e 与光轴 \mathbf{C} 的夹角。由于 $\mathbf{k}_e = k_e(\cos \theta_e, \sin \theta_e \sin \varphi, \sin \theta_e \cos \varphi)$, $\mathbf{C} = \mathbf{C}(0, 0, 1)$, 因此

$$\cos \theta = \cos(\mathbf{k}_e, \mathbf{C}) = \sin \theta_e \cos \varphi \quad (2)$$

设 e 光线的传播方向(玻印廷矢量)单位矢为 $\mathbf{S}_e(S_x, S_y, S_z)$ 它与 \mathbf{k}_e 的夹角为 α , 即

$$\cos \alpha = \cos(\mathbf{k}_e \wedge \mathbf{S}_e) = S_x \cos \theta_e + S_y \sin \theta_e \sin \varphi + S_z \sin \theta_e \cos \varphi, \quad (3)$$

式中 α 为离散角, 它可由下式给出^[4]

$$\tan \alpha = [(n_e^2 - n_o^2) \tan \theta] / (n_e^2 + n_o^2 \tan^2 \theta) \quad (4)$$

由 \mathbf{S}_e 、 \mathbf{k}_e 和 \mathbf{C} 共面, 得到

$$\sin \theta_e \sin \varphi S_x - \cos \theta_e S_y = 0 \quad (5)$$

联立解(1)式, (2)式, 得

$$\sin \theta_e = \sin \theta_1 n_e^{-1} [1 + \lambda^2 (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \theta_1]^{-1/2} \quad (6)$$

$$\cos \theta = \sin \theta_1 \cos \varphi n_e^{-1} [1 + \lambda^2 (n_o^2 - n_e^2) \cos^2 \varphi \sin^2 \theta_1]^{-1/2} \quad (7)$$

式中 $\lambda = (n_o n_e)^{-1}$ 。联立解(3)式、(5)式并考虑到 $S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 = 1$ 得到

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \cos \alpha \cos \theta_e + \sin \theta_e \sin \alpha \cos \varphi (1 + \tan^2 \theta_e \sin^2 \varphi)^{-1/2} \\ S_y &= \cos \alpha \sin \theta_e \sin \varphi + \tan \theta_e \sin \theta_e \sin \alpha \sin \varphi \cos \varphi (1 + \tan^2 \theta_e \sin^2 \varphi)^{-1/2} \\ S_z &= \cos \alpha \sin \theta_e \cos \varphi - \sin \alpha \cos \theta_e (1 + \tan^2 \theta_e \sin^2 \varphi)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中 α 、 θ_e 由(4)式、(6)式给出。(8)式就是 e 光线的方向矢的表达式。

三、双折射波片的相位延迟

光路如图 2 所示。 o 光的方向矢 \mathbf{S}_o 与光程 $n_o \cdot \overline{AO}$ 分别为

$$\mathbf{S}_o = \mathbf{k}_o = S_o(\cos \theta_o, \sin \theta_o \sin \varphi, \sin \theta_o \cos \varphi), \quad (9)$$

$$n_o \overline{AO} = n_o^2 d (n_o^2 - \sin^2 \theta_1)^{-1/2}, \quad (10)$$

式中 d 为波片厚度。而 e 光线的光程为

$$n \overline{BO} + \overline{BE} = (nd/S_x) + \overline{AB} \sin \theta_1 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{OB}^2 + \overline{OA}^2 - 2\overline{OB} \cdot \overline{OA} \cos(\mathbf{S}_o, \mathbf{S}_e) \\ &= d^2 \left[\frac{1}{S_x^2} + \frac{n_o^2}{n_o^2 - \sin^2 \theta_1} - 2 \frac{n_o}{S_x \sqrt{n_o^2 - \sin^2 \theta_1}} \right. \\ &\quad \left. \times (S_x \cos \theta_o + S_y \sin \theta_o \sin \varphi + S_z \sin \theta_o \cos \varphi) \right] \quad (12) \end{aligned}$$

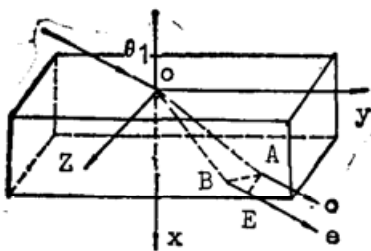


Fig. 2 Scheme of path of a ray that passes through the birefringent wave-plate

波片的相位延迟为

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi}{\lambda} (n \overline{BO} + \overline{BE} - n_o \overline{AO}) \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \left(n \frac{d}{S_x} + \overline{AB} \sin \theta_1 - \frac{n_o^2 d}{\sqrt{n_o^2 - \sin^2 \theta_{11}}} \right) \quad (13) \end{aligned}$$

式中 n 、 S_x 、 \overline{AB} 由(2)式、(8)式和(12)式得出。这就是相位延迟的一般公式。显然, 相位延迟与入射角 θ_1 、入射面方位角 φ 都有关系, 因此发散光束经过波片后, 出射光束

的偏振态分布不再均匀, 形成偏振像差。

四、偏振像差

假设入射光束为线偏光

$$|E_i\rangle = \begin{pmatrix} E_y \\ E_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

讨论小角入射情况下 ($\theta \leq 5^\circ$), 石英标准 1/4 波片 ($\lambda = 6.328 \times 10^{-4} \text{ mm}$, $n_o = 1.54264$, $n_e = 1.55170$ ^[5]; $d = 1.973 \text{ mm}$) 的偏振像差。

1. 出射光的相位延迟分布

在小角入射条件下 ($\theta_1 \leq 5^\circ$), 将 (13) 式中各项展开为 θ 的级数, 取至 θ_1^2 项, 得

$$\delta = \delta_0 \left(1 + \frac{n_o \sin^2 \varphi - n_e \cos^2 \varphi}{2n_o^2 n_e} \theta_1^2 \right) \quad (14)$$

$$\delta_0 = (2\pi d / \lambda) (n_e - n_o)$$

式中 δ_0 为正向入射时的相位延迟。当 $\varphi = 0$ 时, 代入 (14) 式得到

$$\delta = \delta_0 [1 - (\theta_1^2 / 2n_o^2)] \quad (15)$$

当 $\varphi = 90^\circ$ 时, 代入 (14) 式, 得到

$$\delta = \delta_0 [1 + (\theta_1^2 / 2n_o n_e)] \quad (16)$$

与已有的结果完全一致^[6], 说明在二级近似中, 取至 θ_1^2 项, 忽略一些小项是合理的。

按 (14) 式, 得到线偏光入射到波片后, 出射光的相位延迟 δ 在同一入射面上 (如 $\varphi = 0, 90^\circ, 45^\circ$) 随入射角的变化如图 3 所示; 入射角相同时相位延迟 δ 随入射面方位角 φ 的变化如图 4 所示。

2. 出射光束椭圆率分布

o 光线的电矢量垂直于它的主平面, 其单位矢为

$$E_o = (1 + \tan^2 \theta_0 \sin^2 \varphi)^{-1/2} (-\tan \theta_0 \sin \varphi, 1, 0) \quad (17)$$

e 光线的电矢量在它的主平面内, 其单位矢为*

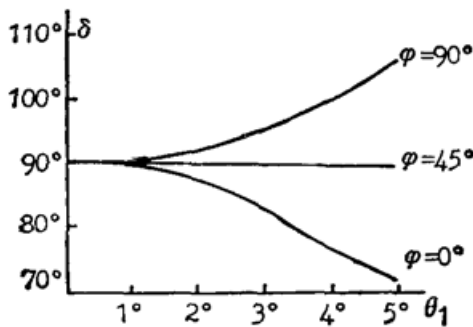


Fig. 3 Relationship between retardations of emergent ray and its incident angle as the line polarized light falls on three incident planes

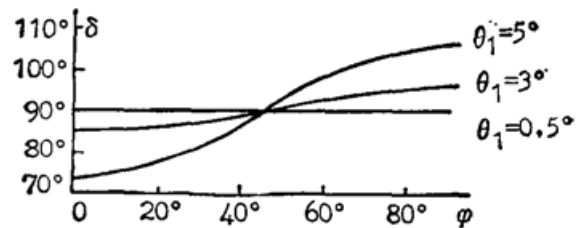


Fig. 4 Relationship between retardations of emergent ray and azimuth angle of its incident plane as line polarized light falls on the surface with three incident angles

* 这里, 由于 $\theta \leq 5^\circ$, 离散角 $\alpha \sim (10^{-4})^\circ$, 且 S_o, k_o 视为一致。

$$E_e = \frac{[-\sin \theta_e \cos \varphi, -\sin \theta_e \tan \theta_e \sin \varphi \cos \varphi, \cos \theta_e (1 + \tan^2 \theta_e \sin^2 \varphi)]}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta_e \sin^2 \varphi}} \quad (18)$$

在小角入射条件下, o 、 e 光线的剪切差很小^[6], 因此可以将两者视为沿同一方向传播, 将 E_o 、 E_e 视为一个电矢量的两相互垂直的分量。将 $E_i = (0, 1, 1)$ 往 E_o 、 E_e 上投影, 得到 E_{oi} 、 E_{ei} , 再将其展开为 θ_1 的二阶级数, 得到

$$E_{ei} = 1 - (\sin^2 \varphi / 2n_e^2) \theta_1^2, \quad E_{oi} = 1 - (\theta_1^2 / 2n_o^2) (\cos^2 \varphi + \sin 2\varphi) \quad (19)$$

于是出射光的电场矢量两分量为

$$E_{oo} = t_{12o} t_{21o} \exp(-i\delta_o) E_{oi}, \quad E_{eo} = t_{12e} t_{21e} \exp(-i\delta_e) E_{ei} \quad (20)$$

式中 t_{12o} 、 t_{21o} 分别为 o 光经过第一界面, 第二界面的振幅透射比, t_{12e} 、 t_{21e} 分别是 e 光经过第一界面, 第二界面的振幅透射化。由于 t_{12o} 、 t_{12e} 等的关系式较复杂。考虑两个特殊截面

(1) 入射面垂直于光轴^[4]

$$\left. \begin{aligned} T_{o\perp} &= t_{12o} t_{21o} \doteq 1 - [(1 - n_o) / (1 + n_o)]^2 [1 + (2\theta_1^2 / n_o)] \\ T_{e\perp} &= t_{12e} t_{21e} \doteq 1 - [(1 - n_e) / (1 + n_e)]^2 [1 - (2\theta_1^2 / n_e)] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

T_o 、 T_e 分别为 o 光、 e 光经过波片的振幅透射比。

(2) 入射面平行于光轴^[4]

$$\left. \begin{aligned} T_{o\parallel} &= 1 - [(1 - n_o) / (1 + n_o)]^2 [1 + (2\theta_1^2 / n_o)] \\ T_{e\parallel} &= 1 - [(1 - n_e) / (1 + n_e)]^2 [1 - (2n_e \theta_1^2 / n_o^2) (n_o^2 - 1) / (n_e^2 - 1)] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

利用(14)式和(19)~(22)式, 得到这两截面上的出射光椭圆率随 θ_1 的变化如图 5^[7]。

计算表明, 小角入射时, $(T_{e\perp} / T_{o\perp})$ 、 $(T_{e\parallel} / T_{o\parallel})$ 都很接近 1, 可以推知, 此时通于任意一个入射面(φ 任取), $(t_{12e} t_{21e} / t_{12o} t_{21o})$ 可视为 1。这样, 利用(14)式、(19)式和(20)式, 得出 $\theta_1 = 3^\circ, 5^\circ$ 的两圆锥光束的出射光椭圆率 ε 随入射面方位角 φ 的关系如图 6 所示。

类似于上面的分析方法, 给出圆偏光 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 入射时, 出射光的椭圆率分布如图 7、图 8 所示。(出射光的相位延迟分布与图 3、图 4 中相似)。

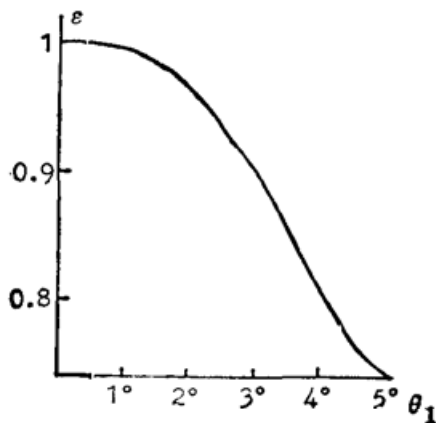


Fig. 5 Relationship between ellipticity of emergent ray and its incident angle as line polarized light falls on planes which parallel and perpendicular to the optic axis

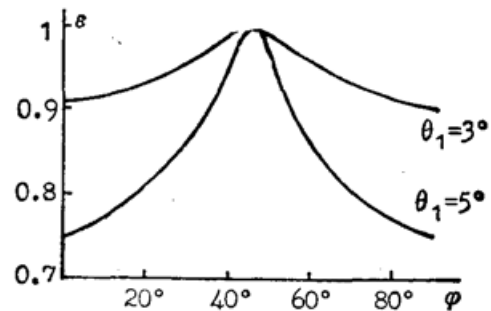


Fig. 6 Relationship between ellipticity of emergent light and azimuth angle of its incident plane as line polarized light falls on the waveplate with different incident angles

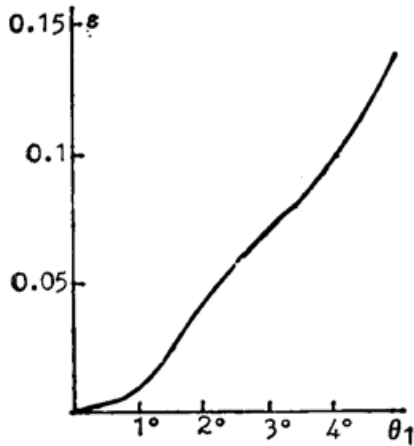


Fig. 7 Relationship between ellipticity of emergent light and its incident angle as circle polarized light falls on planes which parallel and perpendicular to the optic axis

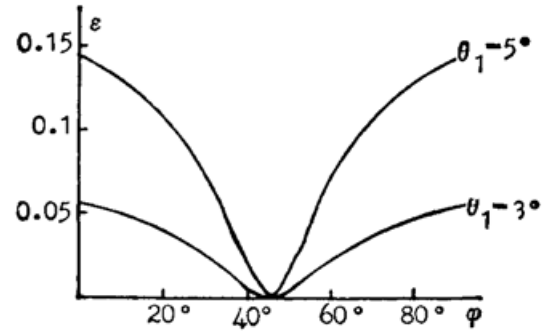


Fig. 8 Relationship between ellipticity of emergent light and azimuth angle of its incident plane as circle polarized light falls on the wave-plate with different angles

五、分 析

(1) 从图 5~图 8 中看到, 出射光相位延迟像差 $\Delta\delta'$ (出射光相位延迟与理想值 90° 之差)、椭圆率像差 $\Delta\varepsilon$ (出射光椭圆率与 1 或 0 之差) 与入射角 θ_1 、入射面方位角 φ 直接相关: 在同一入射面上, $\Delta\delta'$ 随入射角 θ_1 增大而增加; 对入射角一定的圆锥光束, $\Delta\delta'$ 在 $\varphi=45^\circ$ 处接近于 0, 在 $\varphi=45^\circ$ 两侧非对称地递增; $\Delta\varepsilon$ 的变化规律与 $\Delta\delta'$ 相似。

从图中可以看出, 发散光束经过波片后, 偏振像差很明显 ($\Delta\delta_{\max} \sim 16^\circ$, $\Delta\varepsilon_{\max} \sim 0.25$), 出射光偏振状态的这种差异, 在图像信息处理系统中将严重影响成像质量, 因此在高精度的光学设计中, 这一效应是值得重视的。

(2) 对于其他偏振态的入射光, 其出射光的偏振像差同样可利用本文介绍的方法分析。

(3) 本文在固定坐标系中给出了光线追迹, 相位延迟分布的严格公式, 解决了过去从入射面为坐标面给分析发散光束入射带来的困难, 为双折射波片用于发散光束的光线追迹, 相位延迟分析和偏振像差分析提供了一种方便的方法。

参 考 文 献

- [1] R. A. Chipman; *Opt. Engng*, 1989, **28**, No. 2 (Feb), 90~99.
- [2] Eugene Waluschka; *Opt. Engng*, 1989, **28**, No. 2 (Feb), 86~89.
- [3] 李恭亮等;《晶体光学原理》(国防工业出版社, 北京, 1990)。
- [4] 蒋民华;《晶体物理》, (山东科学技术出版社, 济南, 1980)。
- [5] 《光学仪器设计手册》, (国防工业出版社, 北京 1971)。
- [6] 李国华等;《曲阜师范大学学报》, 1988, **11**, No. 4, 97~100.
- [7] M. Born 等;《光学原理(上)》, (科学出版社, 北京, 1986)。

Analysis on polarization aberration of a birefringent wave-plate in divergent Beam

LI GUOHUA XIAO SHENGAN LI JIZHONG

(Laser Institute, Qufu Normal University, Qufu 273165)

(Received 15 May 1991; revised 2 July 1991)

Abstract

Using ray tracing method, the polarization aberration of a birefringent wave-plate produced in a divergent beam is analysed, the approximate treatment on the polarization aberration of a standard quarter wave-plate is presented under the circumstance of small incident angle.

Key words: birefringent wave-plate, polarization aberration, retardation.