

# 多次散射的分级计算及数值模拟

刘 建 伟

(深圳永光制品公司, 深圳 518105)

## 提 要

本文改进了多次散射的计算方法并提出了一个引理, 经简化的数值模拟其结果与已发表的实验数据相吻合。

关键词: 多次散射, 米(Mie)理论。

## 一、引 言

电磁波在稠密粒状介质中传播而发生的多次散射现象是测量上不容忽视, 而理论上又不能精确求解的难点。过去几十年来所发展的处理技术有环带法、相继单次散射法及分离坐标或多向流方法等等。实用上则以采用蒙特卡罗方法较为常见<sup>[1,2]</sup>。针对现有 Malvern 粒度分析仪(以单次散射为计算依据)在样品光透过率低时的多次散射校正, 文献[2, 3]分别提出了数值模拟方法和基于实验的经验公式。本文从上述工作出发, 对大粒子介质中的电磁多次散射进行了详尽的分析, 求得了简明有效的关系式, 即光子在随机介质中的散射是一个泊松过程, 使数学需逆变得容易。

## 二、假设与引理

如样品颗粒均呈球状, 尺度分布在几微米至几百微米之间, 根据米(Mie)理论<sup>[4]</sup>, 单次散射的远场图样近似为夫琅和斐衍射, 且散射光能几乎全部集中在前向近轴区内, 漫射和后向散射光可忽略不计。本文提出下述引理作为分级计算的依据:

单色平行光束经尺度满足夫琅和斐衍射条件的大粒子系综散射的接收光场, 为各级散射光的强度迭加, 任一级(设次数为  $m$ ) 散射所占的能量份额服从泊松分布

$$E^m = \frac{(-\ln T)^m}{m!} T, \quad (1)$$

式中  $T$  为粒子系综的透光率。其证明如下。

如图 1 所示, 将粒子系综以法线与光轴平行的假

想平面划分成透光率为某一定值  $\tau$  的若干薄层, 当  $\tau \rightarrow 1$  时, 层内粒子间的多次散射效应可

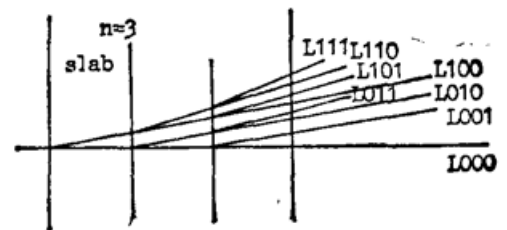


Fig. 1 Energy states of the scattered light

忽略。入射光波在层间的能量传递过程可表成两个状态：直接透过或被散射。直透的几率为  $\tau$ 。将一根光线经过  $n$  个薄层的能量状态表示为  $Li_1i_2\cdots i_n$ ，此处  $i_{m'}$  ( $m' \leq n$ ) 定义为二进制数， $i_m$  为 1 表示它经过第  $m'$  层时被散射，反之为直透。被散射  $m$  次的光线透过率是  $\tau^{n-m} \cdot (1-\tau)^m$ 。其组合数（即  $Li_1i_2\cdots i_n$  下标中共含  $m$  个的光线种数）是  $\binom{n}{m}$ ，故  $m$  次散射的能量份额为

$$E^m = \binom{n}{m} \tau^{n-m} (1-\tau)^m, \quad (2)$$

此为二项分布。考虑到  $\tau \rightarrow 1$  时薄层内的单次散射近似趋于精确，若将  $n$  取到无穷大（其时  $\tau \rightarrow 1$ ），就得到了(1)式。

粒子最稠密的情形，例如透光率  $T=0.02$ ， $\sum_{m=0}^8 E^m = 0.993$ ，足够好地接近于入射光强，故计算时级次高于 8 的散射光均可忽略。这使得本文在计算上远优于文献[2]。以前向散射比  $R = Q_{fw}/Q_{scs}$  为修正因子，(1)式成为

$$E^m = R^m \frac{(-\ln T)^m}{m!} T, \quad (3)$$

适用于米散射的一般尺度范围。

### 三、数值模拟结果

本文采用了与文献[2]类似的方法，将  $m$  级散射光的角分布分离成光线元  $E_i^m$ ， $i$  为角元序号。利用矩阵递算法

$$E_i^{m+1}(\theta) = \sum_j \sum_k T_{ijk} P_j(\theta') E_k^m(\theta), \quad (4)$$

式中  $P_j(\theta')$  为相函数， $T_{ijk}$  为传递矩阵（仅与仪器结构参数有关），可以递推出各级散射光的强度分布。归化因子  $C^{m+1}$  应满足

$$\|C^{m+1} E_i^{m+1}(\theta)\|_{\infty} = E^{m+1}. \quad (5)$$

与角元相应的模拟探测器环上能量分布值为

$$E_i = \sum_{m=1}^{\infty} C^m E_i^m. \quad (6)$$

与  $T_{ijk}$  相应的模拟环环带间没有空隙。 $E_i^m$  仅与粒度有关， $C^m$  仅与透过率有关，这都是计算时应注意的。

在基于光衍射原理的马尔文微粒测量系统中，透射光的衰减亦即多次散射效应的加剧一般会导致计算出来的粒径分布范围的增宽和均值的减小，故文献[3]用实验的方法实现对具有一定粒径分布的样品在几个不同的透过率水平下的测量，试图校正多次散射造成的误差。本文从理论上探讨了这一问题，限于条件，这里仅给出计算的初步结果。假设粒度服从 Rosin-Rammler 分布<sup>[5]</sup>。表 1 给出了尺寸参数  $\bar{x}=38$ ，分布参数  $N=1.93$  时，计算得出的四个透过率水平下的探测器各环信号值。当浊度  $(1-T) \rightarrow 0$  时，单次散射模型是精确的（最大信号值  $S_m$  落在第 10 环上）。而当着浊度增大， $S_m=2047$  下移，信号分布也趋平坦，使最小二乘法拟合得出的  $\bar{x}$ 、 $N$  值发生相应的移动。表 2 给出本文方法的结果与文献[3]中表 III 的一组实验测量值的对照，可见相当吻合。

Table 1 Distribution of signals relative to transmittance

Zone No.	$\bar{X}=38$			
	$N=1.93$ Obscu. (1-T)			
	0	0.6	0.85	0.95
1	130	172	199	325
2	226	224	244	367
3	346	276	297	418
4	504	363	379	495
5	729	480	490	538
6	1021	644	646	748
7	1386	875	870	958
8	1730	1163	1150	1222
9	1868	1491	1453	1503
10	2047	1765	1739	1777
11	1961	2047	1959	1963
12	1790	2033	2047	2047
13	1559	1969	1980	1983
14	1308	1717	1737	1755
15	1041	1280	1311	1362

Table 2 Comparison between experiments and simulation

Obscu.	Exp.		Sim.	
	$\bar{X}$ (um)	N	$\bar{X}$ (um)	N
0.38	48.3	2.13	48.8	2.02
0.61	45.7	2.00	45.8	1.93
0.76	44.7	1.95	45.6	1.78
0.85	41.5	1.84	42.0	1.75
0.92	41.6	1.81	42.1	1.64
0.95	38.2	1.72	38.9	1.62

#### 四、反向散射

有许多场合牵涉到须计及反向散射的多次散射问题<sup>[6]</sup>。除蒙特卡罗法之外，其余方法难以付诸应用。但关系式(1)仍能简化求解手续。如图2所示，定义 $k$ 为各向同性反向散射——消光比，则第 $m$ 级反向散射强度正比于 $k^m$ ， $k$ 在大粒子情形是小值，从而单次反向散射强度远大于反向接收场中的其余各奇次反向散射强度之和，故后者可忽略不计。又大粒子的反向散射能量仍集中于近轴区，因此，仍可采取分层的方法，波的反向传播模式如图3所示。

薄层内粒子将部分前向散射光沿原路返回，往反过程中发生 $m$ 次前向散射的光波强度

$$E_b^m = \int_1^{T_0} \frac{(-\ln T^2)}{m!} T^2 (-kdT) = \frac{kT_0^3}{3} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{(-3 \ln T_0)^j}{j!} \quad (7)$$

当 $T_0=0$ 时，有

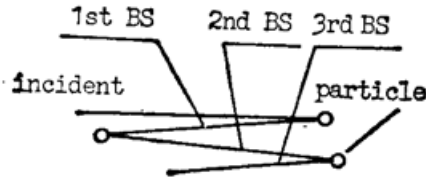


Fig. 2 Multiple back-scattering between particles

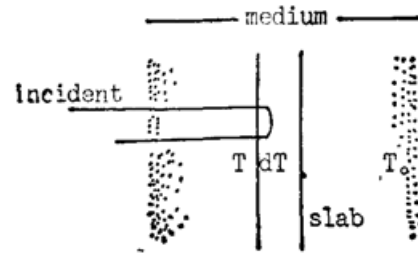


Fig. 3 An illustration of back-scattering of light

$$\left. \begin{aligned} E_{b0}^m &= \frac{k}{3} \left( \frac{2}{3} \right)^m, \\ \Sigma E_{b0}^m &= \frac{k}{3} \frac{1}{1 - (2/3)} = k_0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

如考虑粒子的吸收, (1)式应为

$$E^m = \frac{(-\ln T)^m}{m!} T \omega_0^m, \quad (9)$$

式中  $\omega_0$  为单次散射反照率。结果有

$$\left. \begin{aligned} E_{b0}^m &= \frac{k}{3} \left( \frac{2}{3} \omega_0 \right)^m, \\ B'_c &= \Sigma E_{b0}^m = \frac{k}{3} \frac{1}{1 - (2/3)\omega_0}, \\ E_b^m &= \frac{k T_0^3 \omega_0^m}{3} \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{(-3 \ln T_0)^j}{j!}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

上述等式潜在应用于大气测量, 如给激光雷达测量云层水滴尺度分布的计算带来便利等等。

## 五、结 论

分级计算方法不仅消除了分层模型的理论误差而且大大提高了运算速度, 使得整个模拟过程在 IBM-PC 机上即可快速完成, 进一步可以实现在激光粒度分析仪上对高浓度样品进行实时测试而无需标定。

本文提出的关系式也可由统计光学的观点得到证明。

## 参 考 文 献

- [1] L. P. Bayvel, A. R. Jones, "Electromagnetic Scattering and Its Application". (Applied Science, London, 1981), 166~174.
- [2] H. Gomi, *Appl. Opt.*, 1986, 25, No. 19 (Oct), 3552~3557.
- [3] L. G. Dodge, *Opt. Eng.*, 1984, 23, No. 5 (Mar), 624~629.
- [4] 吴 健, 乐时晓; 《随机介质中的光传播理论》, 成都电讯工程学院出版社, 1988, 11~24.
- [5] E. Dan Hirleman, *Opt. Eng.*, 1984, 23, No. 5 (Mar), 600~619.
- [6] Yasukuga, Akira Ishimaru, *Appl. Opt.*, 1989, 28, No. 11 (Jun), 2165~2169.
- [7] S. F. Cliford, *Appl. Opt.*, 1987, 26, No. 7 (Apr), 1257~1264.

## Separation of multiple scattering and its numerical simulation

LIU JIANWEI

(*Yongkong Manufactures Corporation Ltd., Shenzhen 518105*)

(Received 12 September 1990; revised 2 January 1991)

### Abstract

An improved notion of calculation of multiple scattering based on the method of successive singular scattering and a theorem are proposed. The results of simplified numerical simulation are in good agreement with the published experimental data.

**Key words:** multiple scattering, mie theory.