

# 部分相干场的计算

盛 富 根

(上海光学仪器厂, 上海 200093)

## 提 要

本文描述: 应用归化点扩散函数来计算最佳焦点处的 Strehl 强度及应用部分相干光成像理论来计算不透明直边和一对直线的亮度分布。结论是部分相干光象的极限分辨率是相干度的函数(除了象差)。

关键词: 正则坐标、相干度参数。

## 一、引 言

在部分相干光的成像理论研究中, 主要讨论光场的复可干度分布。在满足远场的条件下, 复可干度  $\mu$  正比于准单色光源的强度  $I$  的傅里叶变换<sup>[1]</sup>

$$\mu(u_1 - u_2, v_1 - v_2) = \iint_{\sigma} I(x_0, y_0) \exp\{-i 2\pi s [(u_1 - u_2)x_0 + (v_1 - v_2)y_0]\} dx_0 dy_0, \quad (1)$$

式中  $u = 2\pi n \xi \sin \alpha_c / \lambda$ ,  $v = 2\pi n \eta \sin \alpha_c / \lambda$  为物平面上的正则坐标,  $n \sin \alpha_c$  为照明数值孔径,  $(\xi, \eta)$  为物面上的点坐标,  $\lambda$  为入射光线波长,  $(x_0, y_0)$  为等效光源  $\sigma$  上的正则坐标,  $s$  为相干度参数

$$s = n \sin \alpha_c / (n \sin \alpha_0), \quad (2)$$

式中  $n \sin \alpha_0$  为物镜的数值孔径。当  $\mu = 1$  时为相干光, 所对应的  $s = 0$ ; 当  $\mu = 0$  时为非相干光, 所对应的  $s = \infty$ 。 $\mu$  是  $s$  的单调函数: 当  $s$  从 0 递增到  $+\infty$  时,  $\mu$  从 1 递减到 0。部分相干光的  $s$  满足:  $0 < s < \infty$ 。本文讨论的物理量是相干度参数  $s$ 。根据 Hopkins 理论<sup>[2]</sup>: 对于给定的光瞳函数和物空间的直边及一对直线, 在部分相干光照明下计算象空间的照度分布。另外, 构造光瞳函数的过程中, 利用波差函数给出光场中最佳焦点处的 Strehl 强度, 它是评价显微物镜成像质量的重要参数。

## 二、Strehl 强度的计算

物平面上任一点发出的单色球面波, 经过光学系统后, 在象空间形成一个波场, 在波场的每一点有固定的振幅:

$$U(u', v') = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp[-i 2\pi(xu' + yv')] dx dy, \quad (3)$$

式中  $x, y$  为光瞳上的正则坐标,  $u', v'$  为象平面上的正则坐标

$$u' = (n/\lambda)\xi' \sin \alpha_s, \quad v' = (n/\lambda)\eta' \sin \alpha_t, \quad (4)$$

式中  $n$  为物方折射率, 而  $\alpha_s$  及  $\alpha_t$  分别为子午及弧矢极限光线与主光线的夹角,  $\xi', \eta'$  为象面上的实际坐标。光瞳函数  $f(x, y)$  为

$$f(x, y) = \left. \begin{cases} f_0(x, y) \exp[ik W(x, y)], & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 > 1 \end{cases} \right\} \quad (5)$$

$$k = (2\pi/\lambda)$$

$f_0(x, y)$  为出射波面上的振幅分布函数(本文取 1),  $W(x, y)$  为波差函数。象空间每一点的光强<sup>[1]</sup>

$$I = P(u', v') = |U(u', v')|^2. \quad (6)$$

我们感兴趣是  $I_{\max}$ , 对于理想的光学系统, 光强极值在高斯象点出现; 对于实际光学系统的光强极值在最佳焦点处的出现。对于理想光学系统的  $(u', v')$  坐标原点设在高斯象点, 光强极值用  $P_G(0, 0)$  表示; 对于实际光学系统的  $(u', v')$  坐标原点设在最佳焦点, 光强极值用  $P(0, 0)$  表示, 根据(6)式可得到最佳焦点处的归化的 Strehl 强度

$$\dot{i} = \frac{P(0, 0)}{P_G(0, 0)} = \frac{1}{\pi^2} \left| \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \exp[ik W(x, y)] dx dy \right|^2, \quad (7)$$

$$W(r, \theta) = \sum O_j r^j (\cos \theta)^j, \quad (8)$$

因  $P_G(0, 0) > P(0, 0)$ , 所以  $\dot{i}$  不大于 1。当归化 Strehl 强度不小于 0.8 时, 那么在最佳焦点的象是完备的<sup>[3]</sup>。

### 三、直 边

分析不透明直边在部分相干光照明之下通过光学系统成象后, 在最佳焦面上的直边象的照度分布。本文取的直边平行于  $v$  轴, 物函数为

$$A(u, v) = \begin{cases} \beta \exp(ik\alpha), & u \geq 0 \\ 1, & u < 0 \end{cases} \quad (9)$$

式中  $u, v$  为物平面上的正则坐标,  $\beta$  为振幅透过率,  $\alpha$  为以波长为计的位相移量。当  $\alpha=0$  时,  $\beta$  为低对比度。 $A(u, v)$  的傅里叶频谱, 即光学系统入瞳面上的复振幅可表示成

$$\begin{aligned} a(x-x_0, y-y_0) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} A(u, v) \exp\{-i2\pi[u(x-x_0) + v(y-y_0)]\} du dv \\ &= \frac{1}{2} \delta(y-y_0) \left[ \delta(x-x_0) (\beta e^{ik\alpha} + 1) + \frac{1}{i\pi(x-x_0)} (\beta e^{ik\alpha} - 1) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

式中  $(x_0, y_0)$  为相对于光学系统的等效光源上的实际坐标。而  $\delta(x)$  为狄拉克(Dirac)函数。对  $a(x-x_0, y-y_0)$  加权  $f(x, y)$  进行傅里叶变换得到等效光源元素  $dx_0 dy_0$  所对应的象面的振幅分布

$$\phi(x_0, y_0; u', v') = \iint_{-\infty}^{+\infty} a(x-x_0, y-y_0) f(x, y) \exp[i2\pi(u'x + v'y)] dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \exp[i2\pi(u'x_0 + v'y_0)] \left\{ \exp[ik W(x_0, y_0)] [\beta \exp(ik\alpha) + 1] \right. \\
&\quad \left. + \frac{2[\beta \exp(ik\alpha) - 1]}{i} \right. \\
&\quad \left. \times \int_{2\pi(-x_0 - \sqrt{1-v^2})u'}^{2\pi(-x_0 + \sqrt{1-v^2})u'} \frac{\exp\{i[k W(x_0 + (x/(2\pi u')), y_0) + 2\pi x]\}}{x} dx \right\}, \quad (11)
\end{aligned}$$

于是通过等效光源  $\sigma$  (本文取圆形区域) 上的积分可求得象面上的照度分布表达式<sup>[2]</sup>

$$B'(u', v') = \iint_{\sigma^2 + v^2 < 1} r(x_0, y_0) |\phi(x_0, y_0; u', v')|^2 dx_0 dy_0, \quad (12)$$

$s$  为相干度参数,  $r(x_0, y_0)$  为等效光源上的强度分布函数(本文取  $r(x_0, y_0) = 1$ )。本文只考虑  $s$  的变化。通过计算。在  $u' - B'$  平面上可看到: 当  $s$  增加时, 直边象所对应的曲线  $B(u')$  的最大峰值从右边向  $u' = 0$  处靠拢, 而  $B'(u')$  的极小峰值从左边向  $u' = 0$  靠拢。这意味着点象的爱里(Airy)半径随  $s$  增加而减少。根据瑞利准则可知: 两点象的极限分辨率随  $s$  增加而提高。

#### 四、线分辨率

设物平面上的一对线函数为

$$A(u', v') = G_1 \delta\left(u - \frac{u_0}{2}\right) + G_2 \delta\left(u + \frac{u_0}{2}\right), \quad (13)$$

式中  $G_1, G_2$  为不相同的复数(本文取  $G_1 = G_2 = 1$ ),  $u_0$  为线间隔。一对线函数的傅里叶频谱为

$$a(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} A(u, v) \exp[i2\pi(xu + yv)] dx dy = 2\delta(y) \cos \pi u_0 x. \quad (14)$$

等效光源面元素  $dx_0 dy_0$  所对应的象平面上的复振幅为

$$\begin{aligned}
\phi(u', v'; x_0, y_0) &= \iint_{-\infty}^{+\infty} a(x - x_0, y - y_0) f(x, y) \exp[i2\pi(xu' + yv')] dx dy \\
&= 2 \exp(i2\pi v' y_0) \int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} \cos \pi u_0 (x - x_0) \\
&\quad \times \exp\left\{i2\pi \left[\frac{W(x_0, y_0)}{\lambda} + u' x\right]\right\} dx, \quad (15)
\end{aligned}$$

然后根据(12)式可计算象空间的照度分布。在  $u' - B'$  平面上可以看到, 当  $u_0$  递减时, 曲线  $B'(u')$  在  $u' = 0$  处的曲率也随之递减。根据 Sparrow 准则<sup>[4]</sup>: 当  $u_0$  是两线极限分辨距离时, 曲线  $B'(u')$  在  $u' = 0$  处的曲率是零。通过计算可以知道, 当  $s$  递增时, 两线的极限分辨率也随之而提高。

#### 五、一个实例

数值孔径为 0.65, 线视场为 25 的  $40\times$  平场显微物镜, 它在 0.707 视场的波差系数为

$$\begin{pmatrix} C_{20} & C_{40} & C_{60} & C_{80} & C_{02} & C_{22} \\ C_{42} & C_{62} & C_{04} & C_{24} & C_{44} & C_{21} \\ C_{41} & C_{61} & C_{03} & C_{23} & C_{43} & C_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.162850 & 0.452073 & -0.064967 & -0.049938 & 0.072863 & -0.416990 \\ 0.249778 & -0.153860 & 0.097854 & -0.128606 & 0.112053 & -0.164555 \\ 0.518619 & -0.281919 & 0.272615 & -0.251039 & 0.162395 & -0.132758 \end{pmatrix} \lambda, \tag{16}$$

$\lambda = 589.3 \mu\text{m}$ , 它在最佳焦点处的归化 Strehl 强度  $i = 0.9053$ 。对于直边, 取物的低对比度  $\beta = 0.01$ 。从图 1 及图 2 可观察照度曲线随相干度参数变化的规律。

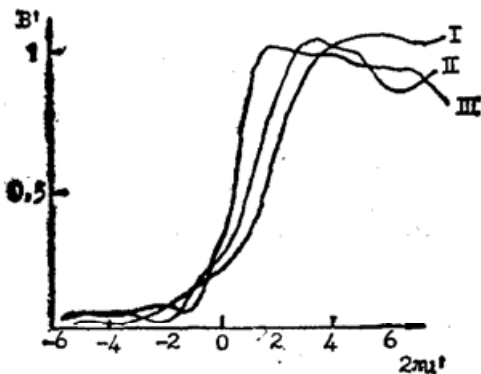


Fig. 1 Distribution of illuminance in the image of an edge: I:  $s = 0.2$ , II:  $s = 0.5$ , III:  $s = 1$

从图 1 中可看到,  $B'(0)$  的值随  $s$  单调增加, 即直边象的接近直线部分的斜率随  $s$  单调增加, 换言之, 意味着点象的爱里(Airy)盘半径随  $s$  单调减少, 从图 2 中可看到, 当  $s = 0.2$  时, 线极限分辨率为

$$0.6 < u_0 < 0.7. \tag{17}$$

当  $s = 0.5$  时, 线极限分辨率为

$$0.58 < u_0 < 0.6. \tag{18}$$

当  $s = 0.7$  时, 线极限分辨率为

$$0.54 < u_0 < 0.55. \tag{19}$$

从这个例子可以看到, 相干度参数  $s$  大, 物镜的成像质量好, 这与文献上说的光学系统在非相干光照明之下的成像质量优于相干光照明之下的成像质量说法是一致的<sup>[3]</sup>。

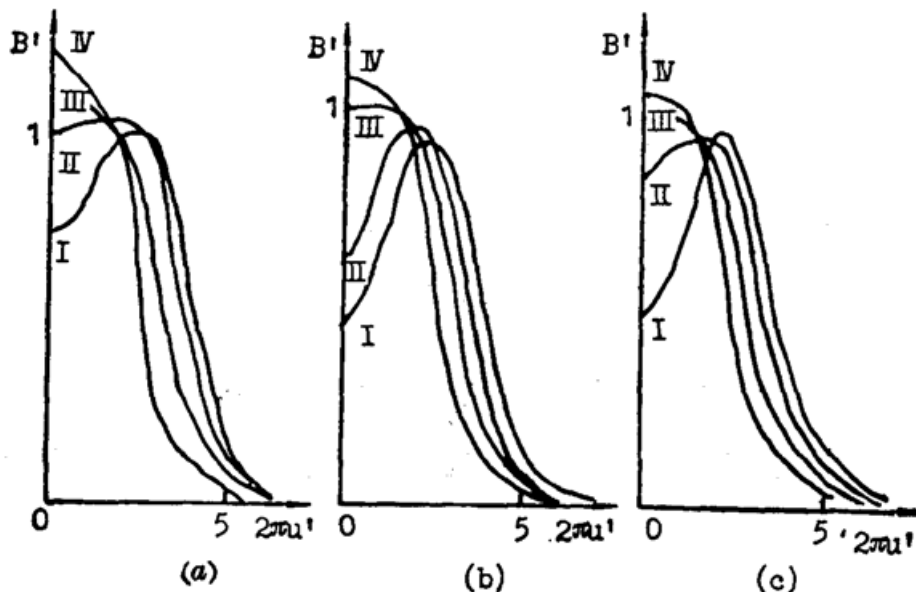


Fig. 2 Distribution of illuminance in the image of a pair of line Case I to IV:  $u_0 = 0.75, 0.7, 0.6, 0.58$  for (a) and (b)  $u_0 = 0.7, 0.6, 0.55, 0.54$  for (c)

参 考 文 献

[1] 庄松林, 钱振邦;《光学传递函数》, 17, (机械工业出版社, 北京 1981), 125.

- [2] Richard Narakat; *Optica Acta*, 1970, No. 5 (May), 337~347.  
[3] M. Born, E. Wolf; *Principles of Optics*, (Pergamon Press, Oxford, 1965), 414~469.  
[4] M. DE, A. Basuray; *Optica Acta*, 1972, 19, No. 4 (Apr), 308~318.

## Calculation of partially coherent field

SHENG FUGEN

(Shanghai Optical Instrument Factory, Shanghai 200093)

(Received 17 December 1991; revised 21 March 1991)

### Abstract

The normalized point-spread function is applied to calculate the strehl intensity at the optimal focus and the theory of image formation in partially coherent light is applied to calculate the luminance distribution for the image of the opaque edge and a pair of line.

This paper concludes that, except objective aberrations, the limit resolution of image in partially coherent light is a function of coherent parameter.

**Key words:** regular coordinate, coherent parameter.