第12卷 第10期
1992年10月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 12, No. 10
October, 1992

光子消灭算符 k 次幂本征态的量子统计性质

时 维 春
(东北林业大学物理系，哈尔滨150040)

马 爱 群
(哈尔滨大学，哈尔滨150020)

提 要

详细讨论了光子消灭算符任意 k 次幂 a^k 的正交归一本征态的振幅 $m(m\leqslant k)$ 次幂压缩和反聚束两种基本非经典效应.

关键词 a^k 的本征态，压缩效应，反聚束效应.

1 引 言

近年来，非经典光场已经成为量子光学领域中引人关注的研究课题. 彭石安等人提出了一种构造光子消灭算符高次幂 a^k 的正交归一本征态的一般方法，并具体研究了 $k=3$ 和 $k=4$ 的情况[1~2]. 王继锁对光子消灭算符高次幂的正交归一本征态的数学结构和量子统计性质作了更普遍的讨论[3]. 在这些工作之前，Hillery 研究了 a^2 的两个正交归一本征态——奇、偶相干态的振幅平方压缩特性[4]，指出它们是光场振幅平方的实部和虚部算势的最小测不准态.

本文在上述工作基础上，侧重于光子消灭算符任意 k 次幂 a^k 的正交归一本征态的量子统计性质的更深入的研究，给出普适的表述.

2 复振幅 m 次幂光场的起伏性质

本文仅讨论 $m=1, 2, \cdots, k$ 的各种幂次情况.

文献[1]和[2]给出了光子消灭算符高次幂 a^k 的本征值为 α^k 的正交归一本征态:

$$|\psi_j\rangle_k=c_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^{kn+j}}{\sqrt{(kn+j)!}}|kn+j\rangle,\tag{1}$$

式中，c_j 为归一化常数，α 为复参数，j 的可能取值为 $j=0, 1, 2, \cdots, k-1$. 令 $|\alpha|^2=x$，有

$${}_k\langle\psi_j|\psi_j\rangle_k=c_j^2A_j(x)=1,\tag{2}$$

$$A_j(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{kn+j}}{(kn+j)!}.\tag{3}$$

考虑到

$$\sum_{l=0}^{k-1}\exp\left(i\frac{2ln\pi}{k}\right)=0,\quad (n\text{ 不是 }k\text{ 的整数倍}),\tag{4}$$

$$\sum_{l=0}^{k-1}\exp\left(i\frac{2ln\pi}{k}\right)=k,\quad (n\text{ 是 }k\text{ 的整数倍}),\tag{5}$$

收稿日期：1991年7月24日；收到修改稿日期：1992年1月6日

$A_j(x)$ 可以写成

$$A_j(x)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\exp\left[x\exp\left(i\frac{2l\pi}{k}\right)-i\left(\frac{2lj\pi}{k}\right)\right]. \tag{6}$$

光场复振幅 m 次幂 a^m 的实部和虚部算符为

$$X_m=(a^m+a^{+m})/2, \quad Y_m=(a^m-a^{+m})/2i \tag{7}$$

它们是厄米算符. 显然

$$[X_m,\ Y_m]=(i/2)[a^m,\ a^{+m}]. \tag{8}$$

文献[3]中已证明

$$a^{+m}a^m=\prod_{l=0}^{m-1}(N-l), \tag{9}$$

又可以证明(见附录)

$$a^m a^{+m}=\prod_{l=1}^{m}(N+l). \tag{10}$$

故而

$$[X_m,\ Y_m]=\frac{i}{2}\left[\prod_{l=1}^{m}(N+l)-\prod_{l=0}^{m-1}(N-l)\right], \tag{11}$$

因此厄米算符 X_m 和 Y_m 满足测不准关系:

$$\Delta X_m\Delta Y_m\geqslant\frac{1}{4}\,{}_k\left\langle\psi_j\left|\prod_{l=1}^{m}(N+l)-\prod_{l=0}^{m-1}(N-l)\right|\psi_j\right\rangle_k. \tag{12}$$

因为 $\langle a^l\rangle=\langle a^{+l}\rangle=0(l\neq LK,\ L$ 为整数$)$, $\langle a^k\rangle=\alpha^k$, $\langle a^{+k}\rangle=\alpha^{*k}$, $\langle a^{2k}\rangle=\alpha^{2k}$, $\langle a^{+2k}\rangle=\alpha^{*2k}$ 和

$${}_k\langle\psi_j|a^{+m}a^m|\psi_j\rangle_k=|\alpha|^{2m}\ \frac{A_{j-m}}{A_j}, \quad (m\leqslant j), \tag{13}$$

$${}_k\langle\psi_j|a^{+m}a^m|\psi_j\rangle_k=|\alpha|^{2m}\frac{A_{k+j-m}}{A_j}, \quad (m>j), \tag{14}$$

就有: $m=k$ 时,

$${}_k\langle\psi_j|\Delta X_k^2|\psi_j\rangle_k={}_k\langle\psi_j|\Delta Y_k^2|\psi_j\rangle_k=\frac{1}{4}\,{}_k\langle\psi_j|\prod_{l=1}^{k}(N+l)-\prod_{l=0}^{k-1}(N-l)|\psi_j\rangle_k, \tag{15}$$

即 a^k 的 k 个正交归一本征态是厄米算符 X_k 和 Y_k 的最小测不准态.

若 k 为偶数, $m=k/2$ 时, 又因为 $\alpha^k+\alpha^{*k}=2|\alpha|^k\cos k\phi$($\phi$ 是 α 的幅角), 有

$${}_k\langle\psi_j|\Delta X_{\frac{k}{2}}^2|\psi_j\rangle_k=\frac{1}{4}\,{}_k\langle\psi_j|\prod_{l=1}^{\frac{k}{2}}(N+l)-\prod_{l=0}^{\frac{k}{2}-1}(N-l)|\psi_j\rangle_k+\frac{1}{2}|\alpha|^k\left(\frac{A_{(l-\frac{1}{2})k+j}}{A_j}+\cos k\phi\right), \tag{16}$$

$${}_k\langle\psi_j|\Delta Y_{\frac{k}{2}}^2|\psi_j\rangle_k=\frac{1}{4}\,{}_k\langle\psi_j|\prod_{l=1}^{\frac{k}{2}}(N+l)-\prod_{l=0}^{\frac{k}{2}-1}(N-l)|\psi_j\rangle_k+\frac{1}{2}|\alpha|^k\left(\frac{A_{(l-\frac{1}{2})k+j}}{A_j}-\cos k\phi\right), \tag{17}$$

式中, 当 $j<k/2$ 时, $l=1$; 当 $j\geqslant k/2$ 时, $l=0$. (16)和(17)式表明, $X_{k/2}$ 和 $Y_{k/2}$(k=偶数)在 a^k 的同一个正交归一本征态中是不等起伏的. 各态中的起伏都包含两个部分: 最小测不准值项和附加的起伏项. 若 $X_{k/2}(Y_{k/2})$ 在某态中的起伏小于其最小测不准值, 则该态具有 $X_{k/2}(Y_{k/2})$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩. 由(16)和(17)式可得 a^k 的各正交归一本征态具有 $X_{k/2}$

和 $Y_{k/2}$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩的 $|\alpha|$ 和 ϕ 所满足的关系式(即压缩范围公式)，分别为

$$\frac{A_{(l-\frac{1}{2})k+j}}{A_j}<-\cos k\phi; \tag{18}$$

$$\frac{A_{(l-\frac{1}{2})k+j}}{A_j}<\cos k\phi. \tag{19}$$

由(18)和(19)式可知:

1) 因 A_j 只是 $|\alpha|$ 的函数，对态 $|\psi_j\rangle_k$ 的 $X_{k/2}$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩，$\phi=(2l+1)\pi/k$ $(l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$时，$|\alpha|$ 有最大压缩范围；对态 $|\psi_j\rangle_k$ 的 $Y_{k/2}$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩，$\phi=2l\pi/k(l=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$时，$|\alpha|$ 有最大压缩范围.

2) 若态 $|\psi_j\rangle_k(j>k/2)$ 在某 $|\alpha|$ 和 ϕ 的取值范围内具有 $X_{k/2}$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩，则在同一个 $|\alpha|$ 和 ϕ 的取值范围内，态 $|\psi_{k/2+j}\rangle_k$ 不具有 $X_{k/2}$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩；反之亦然. 特别是 $\phi=(2l+1)\pi/k$ 时，态 $|\psi_j\rangle_k$ 和 $|\psi_{k/2+j}\rangle_k$ 的 $|\alpha|$ 的压缩范围是相补的. 对于厄米算符 $Y_{k/2}$ 有类似于 $X_{k/2}$ 的结论.

3) $X_{k/2}$ 和 $Y_{k/2}$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩效应不能在 $|\alpha|$ 和 ϕ 的同一取值范围内同时存在.

$m\neq k/2$ 和 k 时，

$$\begin{aligned}{}_k\langle\psi_j|\Delta X_m^2|\psi_j\rangle_k&={}_k\langle\psi_j|\Delta Y_m^2|\psi_j\rangle_k\\&=\frac{1}{4}\,{}_k\langle\psi_j|\prod_{l=1}^{m}(N+l)-\prod_{l=0}^{m-1}(N-l)|\psi_j\rangle_k+\frac{1}{2}|\alpha|^{2m}\frac{A_{lk+j-m}}{A_j},\end{aligned} \tag{20}$$

式中，$j\geqslant m$ 时，$l=0$；$j<m$ 时，$l=1$. (20)式表明，当 $m\neq k/2$ 和 k 时，X_m 和 Y_m 在 a^k 的同一本征态中是等起伏的，含两部分：最小测不准值项和非负的附加起伏项.

3 反聚束效应

态的反聚束效应由二阶相干度小于 1 来表征. 根据二阶相干度的定义,

$$g_j^{(2)}(0)=\frac{{}_k\langle\psi_j|a^{+2}a^2|\psi_j\rangle_k}{{}_k\langle\psi_j|a^+a|\psi_j\rangle_k^2}, \tag{21}$$

并利用(13)和(14)式，得:

$$k=1\text{ 时},\quad g_0^{(2)}(0)=1. \tag{22}$$

$$k=2\text{ 时},\quad g_0^{(2)}(0)=\frac{A_0^2}{A_1^2},\quad g_1^{(2)}(0)=\frac{A_1^2}{A_0^2}. \tag{23}$$

$$k\geqslant3\text{ 时},\quad \left.\begin{aligned}&g_0^{(2)}(0)=\frac{A_0A_{k-2}}{A_{k-1}^2},\\&g_1^{(2)}(0)=\frac{A_1A_{k-1}}{A_0^2},\\&g_j^{(2)}(0)=\frac{A_jA_{j-2}}{A_{j-1}^2},\quad(j\geqslant2).\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

显然,

$$\prod_{j=0}^{k-1}g_j^{(2)}(0)=1. \tag{25}$$

a^k 的 k 个正交归一本征态的二阶相干度的乘积为 1, 这意味着, 在某 x 值处, 若有态具有反聚束效应, 必有态具有聚束效应($g_j^{(2)}(0)>1$), 并且若有态具有最大反聚束效应($g_j^{(2)}(0)=0$), 则必有态具有最大聚束效应($g_j^{(2)}(0)=\infty$); 反之亦然.

下面计算 $x\to0$ 和 $x\to\infty$ 时 $g_j^{(2)}(0)$ 的极限值. 由(6)式得:

$$A_0(0)=1, \tag{26}$$

$$A_j(0)=\frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1}\exp\left(-i\frac{2lj\pi}{k}\right)=0, \quad (j\geqslant1), \tag{27}$$

于是, 当 $k\geqslant2$ 时, 有

$$\lim_{x\to0} g_0^{(2)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{A_0A_{k-2}}{A_{k-1}^2}=\infty, \tag{28}$$

$$\lim_{x\to0} g_1^{(2)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{A_1A_{k-1}}{A_0^2}=0, \tag{29}$$

考虑到 $A_j^{(l)}(x)=A_{j-l}(x)\,(l\leqslant j)$ 和 $A_j^{(l)}(x)=A_{k+j-l}(x)\,(l>j)$, 在 $j\geqslant2$ 时, 应用洛毕达法则 $2(j-1)$ 次, 得

$$\lim_{x\to0} g_j^{(2)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{A_jA_{j-2}}{A_{j-1}^2}=1-\frac{1}{j}. \tag{30}$$

(30)式也含(29)式. 这三式表明, 在 $x\to0$ 时, 态 $|\psi_0\rangle_k(k\geqslant2)$ 具有最大聚束效应, 态 $|\psi_j\rangle_k$ $(j\geqslant1)$ 具有反聚束效应, 并且态 $|\psi_1\rangle_k$ 具有最大反聚束效应. 由于 $g_j^{(2)}(0)$ 是 x 的连续函数, 对 $j\geqslant1$ 的各态都存在一个由 $x=0$ 起始的 x 值范围, 使 $g_j^{(2)}(0)<1$, 态具有反聚束效应.

当 $x\gg1$ 时, 由(6)式近似得 $A_j(x)\approx e^x/k$, 故

$$\lim_{x\to\infty} g_j^{(2)}(0)=1, \tag{31}$$

这时态既无聚束, 也无反聚束.

态 $|\psi_0\rangle_k$ 是否具有反聚束效应, 视 k 的值而定. 已经知道, 无论 x 取何值, 态 $|\psi_0\rangle_2$ 都无反聚束效应, 即通常所说偶相干态无反聚束; 而态 $|\psi_0\rangle_3$ 则在某 x 范围内具有反聚束效应[1].

4 结　　论

1) k 为奇数时, a^k 的正交归一本征态不存在复振幅 $m(m=1, 2, \cdots, k)$ 次幂压缩; k 为偶数时, 一般地说, 这些本征态存在复振幅 $k/2$ 次幂压缩(特殊情况例外, 例如 $k=2$ 时, $|\psi_0\rangle_2$ 有压缩, 而 $|\psi_1\rangle_2$ 却无压缩), 并且态 $|\psi_j\rangle_k$ 和 $|\psi_{\frac{k}{2}+j}\rangle_k(j<k/2)$ 不能在同一个 $|\alpha|$ 与 ϕ 的取值范围内具有 $X_{k/2}(Y_{k/2})$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩. 特别是当 $k\phi$ 为 π 的奇数(偶数)倍时, 这二态关于 $X_{k/2}(Y_{k/2})$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩的 $|\alpha|$ 的压缩范围是相补的. 也就是说, 在 $k\phi$ 为 π 的奇数(偶数)倍时, $|\alpha|$ 取任何值, a^k(k 为偶数)的 k 个正交归一本征态中都必有 $k/2$ 个态具有 $X_{k/2}(Y_{k/2})$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩, 而另 $k/2$ 个态则没有相应的压缩. 在同一 $|\alpha|$ 和 ϕ 取值范围内, 同一态不能同时具有 $X_{k/2}$ 和 $Y_{k/2}$ 的复振幅 $k/2$ 次幂压缩.

2) 在 a^k 的 k 个正交归一本征态中, 除了态 $|\psi_0\rangle_k$ 的 $k-1$ 个态都一定具有反聚束效应(如在 $x\to0$ 时). 在 $x\to0$ 时, $g_j^{(2)}(0)=1-1/j\,(j\neq0)$, 态 $|\psi_1\rangle_k$ 具有最大反聚束效应($g_1^{(2)}(0)=0$), 随 j 的增大, 态 $|\psi_j\rangle_k$ 的反聚束效应减弱. 在某 x 值, 若有态具有聚束效应, 则必有态

具有反聚束效应，并且若有态具有最大聚束效应，则必有态具有最大反聚束效应.

附 录

证明公式:

$$a^m a^{+m} = \prod_{l=1}^{m}(N+l). \tag{A1}$$

证明：用数学归纳法证明．当 $m=1$ 时，

$$aa^{+} = a^{+}a+1 = N+1 \tag{A2}$$

(A1)式成立．设 $m=j$ 时，(A1)式成立，即

$$a^j a^{+j} = \prod_{l=1}^{j}(N+l). \tag{A3}$$

利用关系式 $[N, a^{+j}] = ja^{+j}$，则当 $m=j+1$ 时，有

$$a^{j+1}a^{+j+1} = a^j(N+1)a^{+j} = a^j a^{+j}(N+j+1). \tag{A4}$$

将(A3)代入(A4)式，得

$$a^{j+1}a^{+j+1} = \prod_{l=1}^{j}(N+l)(N+j+1) = \prod_{l=1}^{j+1}(N+l), \tag{A5}$$

即 $m=j+1$ 时，(A1)式也成立．公式得证.

参 考 文 献

[1] 彭石安，郭光灿． 光子消灭算符高次幂的本征态及其性质．物理学报，1990，**39** (1)：51～59

[2] 彭石安，苑晋宁，封开印． a^4 的正交归一本征态及其光子统计性质．量子电子学，1989，**6** (4)：306～311

[3] 王继锁． 光子消灭算符高次幂本征态的数学结构及其性质．物理学报，191，**40** (4)：547～554

[4] M. Hillery, Amplitude-squared squeezing of the electromagnetic field. *Phys. Rev.*, 1987, **A36** (8): 3796～3801

Quantum statistical properties of orthonormalization eigenstates of the k-th power of photon aninihiation operator

SHI WEICHUN

(*Department of Physics, Northeast Foresty University, Harbin* 150040)

MA AIQUN

(*Harbin College, Harbin* 150020)

(Received 24 July 1991; revised 6 January 1992)

Abstract

In this paper, the amplitude squeezing effect and the anti-bunching effect of the orthonormalization eigenstates of the k-th power of photon aninihiation operator are disscuseed in detail.

Key words eigenstates of a^4, squeezing effect, anti-bunching effect.