

# 相关场的投影理论

李喜德 谭玉山

(西安交通大学机械系, 西安 7100491)

## 提 要

本文应用 Radon 变换导出了二维相关场的一维投影积分方程, 并通过构造积分方程的投影算子实现了二维相关场向一维相关场的变换。并对一维投影相关特性进行了理论分析。

关键词: 相关场, 一维投影相关, 一维投影积分方程, Radon 变换。

## 一、引 言

二维相关方法被用于模式识别、运动、变形、流场等的检测时, 对于光学相关方法, 必须事先制作精确的光学匹配滤波器。由于光学滤波器制作复杂且不宜一次制作很多种, 从而使其实用性和灵活性受到严重限制。计算机技术的应用, 使传统的光学相关方法可用电子相关法代替, 并使多用途二维相关检测成为现实。由于二维相关检测需进行庞大的数字运算, 这对于通用的微型计算机来说既费时又负担过重, 因此不太实用。本文应用 Radon 变换和构造一维投影积分方程的投影算子, 实现了二维相关场向一维相关场的变换, 可进行快速一维电子相关检测及识别。

## 二、基本理论

### 1. Radon 变换及一维投影积分方程的导出

在图像重建技术中, 二维图像函数可通过 Radon 变换<sup>[1]</sup>和其一维投影函数联系起来。对于二维相关函数, 如果也把其看成是一个特殊的“图像”函数, 那么它和它的一维投影函数就可通过 Radon 变换联系起来:

设某二个图像函数分别为  $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$ , 对应的投影函数分别为:  $f_s(p)$ 、 $g_s(p)$ , 如果下述两式成立,

$$f_s(p) = \iint f(x, y) \cdot p_f(p, x, y) dx dy, \quad (1)$$

$$g_s(p) = \iint g(x, y) \cdot p_g(p, x, y) dx dy. \quad (2)$$

则称  $p_f(p, x, y)$ 、 $p_g(p, x, y)$  分别为  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  在 (1) 和 (2) 式定义下的投影算子。

图像函数  $f(x, y)$  和  $g(x, y)$  的相关运算为:

$$c(x_0, y_0) = \iint f(x, y) \cdot g^*(x - x_0, y - y_0) dx dy, \quad (3)$$

令  $c(p')$  表示函数  $f_p(p)$  及  $g_p(p)$  的相关运算, 则:

$$c(p') = \int f_p(p) \cdot g_p^*(p - p') dp. \quad (4)$$

由 Radon 变换,  $c(x_0, y_0)$  与其投影函数  $\lambda(p')$  的关系为:

$$\lambda(p') = \iint c(x_0, y_0) \cdot \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dx_0 dy_0. \quad (5)$$

其中  $\mathbf{r} = x_0 \mathbf{i} + y_0 \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{n}$  为过原点的某条射线的单位法向量 (见图 (1)), \* 表示复共轭。

假设:  $p_f(p, x, y)$  及  $p_g(p, x, y)$  的选择满足:

$$c(p') = \lambda(p'), \quad (6)$$

于是由 (4)、(5) 两式可得:

$$\int f_p(p) \cdot g_p^*(p - p') dp = \iint c(x_0, y_0) \cdot \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dx_0 dy_0, \quad (7)$$

化简上式得:

$$\int p_f(p, x, y) \cdot p_g^*(p - p', x - x_0, y - y_0) dp = \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}), \quad (8)$$

(8) 式即是二维相关场的一维投影算子积分方程。把 (6) 式代回 (5) 式得:

$$c(p') = \iint c(x_0, y_0) \cdot \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) dx_0 dy_0. \quad (9)$$

(9) 式表明, 由 Radon 变换所产生的一维投影相关函数是其所对应的二维相关函数沿直线  $p' = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$  的积分投影。

为了应用 (9) 式, 必须构造满足 (8) 式的投影算子  $p_f(p, x, y)$ 、 $p_g^*(p, x, y)$ 。分析 (8) 式, 其左边显然为关于变量  $p$  的相关形式, 因此  $\delta(p, x, y)$  即可作为投影算子的选择形式。

令

$$p_g^*(p - p', x - x_0, y - y_0) = \delta(p - p' - (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}), \quad (10)$$

将其代入 (8) 式即得:

$$\int p_f(p, x, y) \cdot \delta(p - p' - (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}) dp = \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}), \quad (11)$$

解之得:

$$p_f(p' + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}, x, y) = \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}), \quad (12)$$

根据 (10) 式, 若  $p_f$  中  $x, y$  取形式

$$(x, y) = -\mathbf{r}' \cdot \mathbf{n} \quad (13)$$

代入 (12) 式, 即得:

$$p_f(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) = \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}), \quad (14)$$

故:

$$p_f(p, x, y) = p_g^*(p, x, y) = \delta(p - \mathbf{r}' \cdot \mathbf{n}), \quad (15)$$

其中:

$$\mathbf{r}' = X \mathbf{i}' + Y \mathbf{j}'.$$

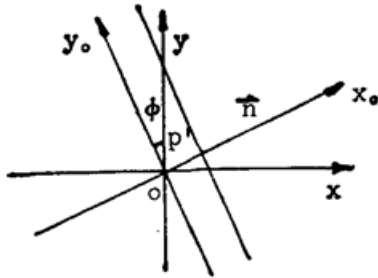


Fig. 1 The coordinate of defining projection

到此,应用 Radon 变换完成了二维相关场的一维投影算子积分方程的推导,并建立了式(4)形式的投影相关模式。它与二维相关场的关系由(9)式完全给定。

为了证明(1)~(9)式及投影相关的特性,本文作了一个散斑场的自相关实验,给出了它的二维灰度场分布  $f(x, y) = g(x, y)$ , 二维相关场  $c(x_0, y_0)$ ,  $x$  方向  $f(x, y)$  的投影  $f_{px}(p)$  及自相关  $f_{px} \star f_{px} = c_x(p')$ ;  $y$  方向的  $f(x, y)$  场投影  $f_{py}(p)$  及自相关  $f_{py} \star f_{py} = c_y(p)$ 。为了比较也给出了两个方向的投影谱。具体计算框图见图 2。

## 2. SNR 与相关峰值的可探测性

为了更好地应用一维投影相关方法,有必要讨论这种投影结果对二维相关场所包含的信息有多大的损失。在此主要讨论两项,SNR(Signal to Noise Ratio)和峰值的可探测性。

为了讨论方便,首先定义两个平面,即定义  $N \times N$  图像函数  $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$  所在的平面为图像平面;  $c(x_0, y_0)$ 、 $c(p')$  所处的平面称为相关平面;并令二维图像函数  $f(x, y)$ 、 $g(x, y)$  的 SNR 为  $(\text{SNR})_{2Di}$ ;  $f_p(p')$ 、 $g_p(p')$  的 SNR 为  $(\text{SNR})_{1pi}$ ;  $c(x_0, y_0)$  的 SNR 为  $(\text{SNR})_{2c0}$ ;  $c(p')$  的 SNR 为  $(\text{SNR})_{1p0}$ 。

在图像平面  $\text{SNR} = \text{每个像素所携带能量的平方根}/\text{图像平面的标准偏差}$ ;

在相关平面,  $\text{SNR} = \text{相关峰值}/\text{相关平面的标准偏差}$ 。

假设图像平面上信号与噪声为均匀分布,噪声满足白噪声,且附加噪声标准偏差为  $\sigma$ , 则:  $(\text{SNR})_{2Di} = 1/\sigma$ 。对于一维图像投影,其相加方差为:  $N\sigma^2$ , 故标准偏差为:  $N^{1/2}\sigma$ 。因此,  $(\text{SNR})_{1pi} = (N^2 \times 1)^{1/2}/N^{1/2}\sigma = N^{1/2}/\sigma$ 。比较  $(\text{SNR})_{2Di}$  与  $(\text{SNR})_{1pi}$ , 可以看到投影图像比其 2-D 图像的 SNR 大  $N^{1/2}$  倍。

对于  $(\text{SNR})_{2c0}$  及  $(\text{SNR})_{1p0}$ , 考虑到从图像平面到相关平面为线性变换,因此可借助空间带宽积来求得。由于在本文中 SNR 为振幅型定义方式,所以对  $N \times N$  图像平面,其空间带宽积为  $N$ ,其一维图像投影函数空间带宽积为  $N^{1/2}$ 。于是  $(\text{SNR})_{2c0}$  和  $(\text{SNR})_{1p0}$  分别为:  $(\text{SNR})_{2c0} = N \times (\text{SNR})_{2Di} = N \times 1/\sigma = N/\sigma$ ,  $(\text{SNR})_{1p0} = N^{1/2} \times (\text{SNR})_{1pi} = N^{1/2} \times N^{1/2}/\sigma = N/\sigma$ , 可见它们具有相同的结果。

以上讨论了在白噪声条件下图像平面上与相关平面上的 SNR 数值比较。事实上,实际的噪声和信号并不一定符合上面的假设,即每个像素上信号与噪声对场的贡献相同。因此前面估计的 SNR 数值偏大,尤其对投影场来说,其 SNR 随着场噪声的增大而迅速减小。但是,正如 Rose<sup>[2]</sup>等人的研究,当图像平面上超过 16 个像素包含图像信号时,一维投影函数的 SNR 都比其 2-D 函数的大。这一结论可以确信一维投影相关峰值的可探测性。关于这点也可以这样理解:在一般情况下,相关函数都具有似圆形及较锐的峰值主瓣,并且只有在峰值周围的旁瓣才有比较大的相关值。因此由(9)式所确定的一维投影相关的峰值及位置必然由  $c(x_0, y_0)$  的峰值及其峰值位置所决定。当  $(\text{SNR})_{1p0} > (\text{SNR})_{2c0}$  时,  $c(p')$  的相关峰值将大于  $c(x_0, y_0)$  的相关峰值,且  $c(p')$  的峰值位置即是  $c(x_0, y_0)$  在  $p'$  轴上的投影位置。

## 3. 投影相关的傅里叶变换谱

设  $\psi(v)$  表示  $c(p')$  的一维傅氏变换,且在相关平面外  $c(p')$ 、 $c(x_0, y_0)$  均为零,则:

$$\psi(v) = F_1[c(p')] = \int_{-\infty}^{\infty} dp' \cdot c(p') \cdot \exp(-2i\pi vp'). \quad (16)$$

将(9)式代入(16)式得:

$$\psi(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} c(x_0, y_0) \cdot \delta(p' - \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}) \cdot \exp(-2i v \pi p') dx_0 dy_0 dp', \quad (17)$$

令:

$$x_0 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}, \quad (18)$$

则:

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} c(x_0, y_0) \cdot \delta(p' - x_0) \cdot \exp(-2i v \pi p') dx_0 dy_0 dp' \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} c(x_0, y_0) \cdot \exp(-2i \pi v x_0) dx_0 dy_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \cdot c(x_0, y_0) \cdot \exp(-2i \pi v x_0) \\ \psi(v) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \cdot c(x_0, y_0) \cdot \exp(-2i \pi v x_0) \end{aligned} \quad (19)$$

将(19)式结果与  $c(x_0, y_0)$  的二维傅氏变换作比较:

$$\bar{C}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} dy_0 \cdot c(x_0, y_0) \cdot \exp[-2i \pi (\xi x_0 + \eta y_0)], \quad (20)$$

得:

$$\psi(v) = \bar{C}(\xi) = \bar{C}(\xi, \eta) \Big|_{\substack{\xi=v \\ \eta=0}} = \bar{C}(v, 0). \quad (21)$$

(21)式说明, 二维相关函数的一个投影的傅氏变换恰是通过该相关函数傅氏变换域中原点的一根直线, 此直线在旋转系统中即是  $\xi$  轴。于是在不同的角度  $\varphi$  下对投影进行变换, 即可将整个二维频域空间在一组通过原点的直线上取样。

#### 4. 一维投影相关与二维相关计算量的比较

对于一维投影相关, 如果取图 1 中  $\varphi = 0^\circ, 90^\circ$ , 则可分别向  $x$  及  $y$  轴投影, 如要计算这两个方向的一个一维相关, 首先需  $2 \times N^2$  次加法进行  $x, y$  法方投影, 然后需  $2 \times M \times (N - 1)$  次加法与  $2 \times M \times N$  次乘法进行两方向一维相关; 同理对常规的两维相关, 需  $N^2 \times M^2$  次乘法,  $M^2 \times (N - 1)^2$  次加法。其中  $N$  指  $N \times N$  图像场,  $M$  指单维所需的相关点数。若取  $M = N$ , 则对一维投影, 加法次数为  $4N^2 - 2 \times N$ , 乘法次数为  $2N^2$ ; 对二维常规相关乘法为

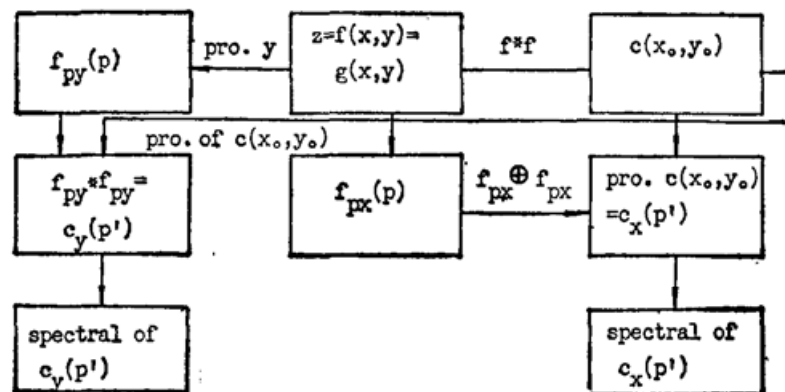


Fig. 2 Histogram of projection correlation

$N^4$ , 加法为  $N^2(N-1)^2$  两者之比分别为, 乘法:  $N^2/2$ , 加法:  $N(N-1)^2/2(N-2)$ 。作为例子, 取  $N=256$ , 则上述两比式值分别为 32768 及 32640, 可见乘法次数大大减少。在本文的一次计算中,  $N=128$ ,  $M=64$ , IBM/PC 条件下, 投影相关单方向一次相关小于 5 秒, 因此两方向相关小于 10 秒钟。

图 2 为一次实验处理时的方框图, 实验结果见图 3, 从这些结果可以看到投影相关对于快速、有效地确定二维相关场的峰值信息是有效的。

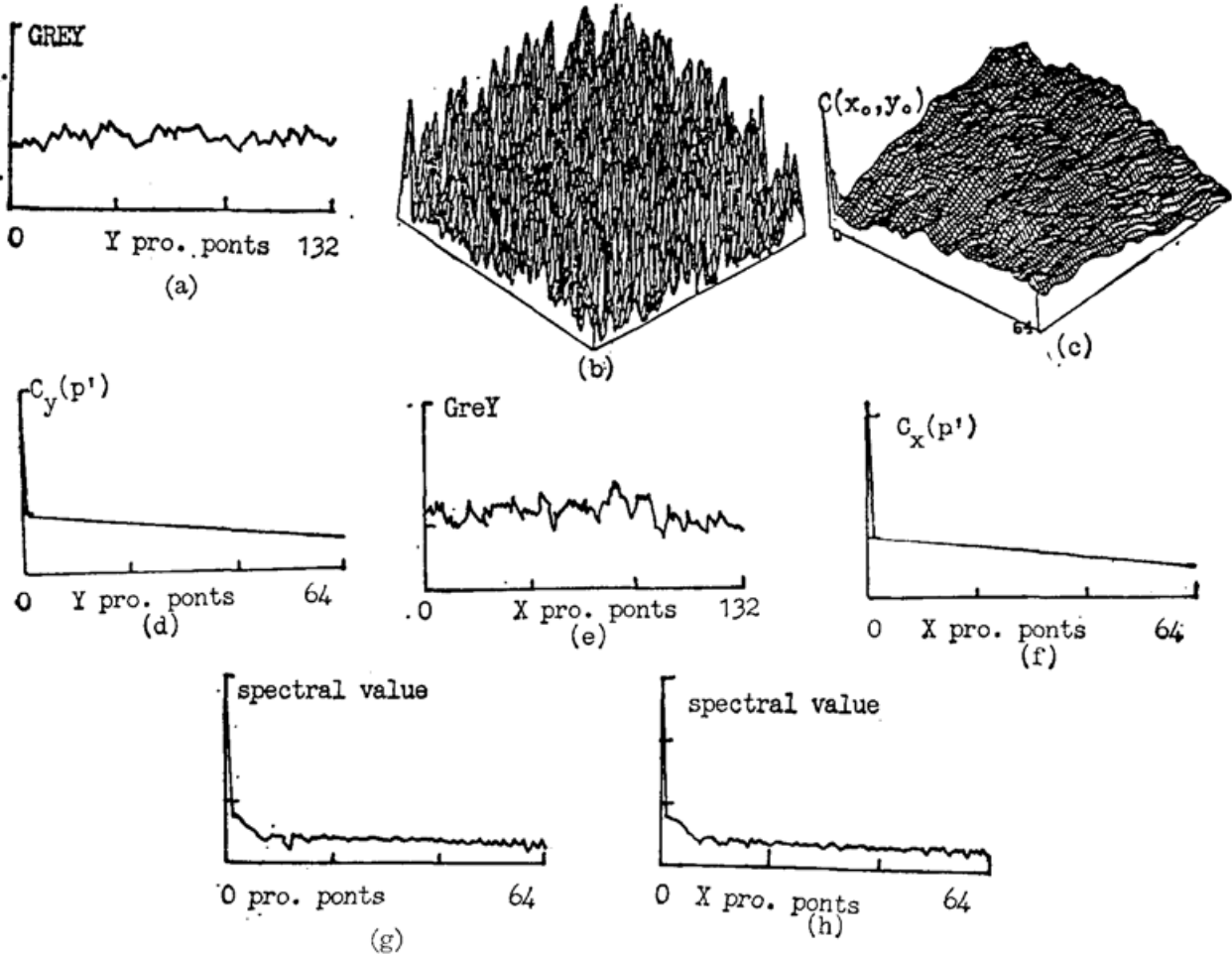


Fig. 3 The Characteristic Experiment of Projection Correlation

(a)  $y$  direction grey field projection; (b) 2-D grey field  $f(x, y)=g(x, y)$ ; (c) 2-D grey correlation field; (d)  $y$  direction projection correlation; (e)  $x$  direction grey field projection; (f)  $x$  direction projection correlation; (g)  $y$  direction projection correlation spectrum; (h)  $x$  direction projection correlation spectrum.

### 三、结 论

由前面的讨论, 得到了二维相关场的一维投影积分方程, 并在满足该积分方程条件下, 通过构造满足积分投影方程的投影算子, 证明了一维投影相关函数是其所对应的二维相关函数沿特定直线的积分投影。应用这一方程可代替常规的二维电子相关方法在不要求精确知道相关数值大小前提下进行相关识别与二维检测。总之, 投影相关函数由于具有比二维相关函数更好的信噪比、更大的峰值量级及很少的计算量, 因此更适合于进行快速模式识别、运动、变形、速度等的检测及误差源分析等。可以预计投影技术作为图像恢复与重建的

一种手段, 在相关检测与识别中也将会有更广泛的应用。

### 参 考 文 献

- [1] S. R. Deans; *Radon Transform and Some of Its Applications*, (Wiley, New York, 1983), 1.  
[2] D. Rose *et al.*; *Opt. Acta*, 1984, 31, No. 10(Oct), 1151.

## Projection theory of correlation field

LI XIDE AND TAN YUSHAN

(Department of Mechanical Engineering, Xian Jiaotong University, Xian 710049)

(Received 15 October 1990; revised 26 December 1990)

### Abstract

The 1-D projection integral equation of 2-D correlation field has been deduced by using Radon transforms, so that 2-D correlation field is transformed to 1-D correlation field through structuring the projection operators. The properties of the 1-D correlation projection field has been analysed.

**Key words:** correlation field, 1-D projection correlation, 1-D projection integral equation, Radon transforms.