

双光子 Jaynes-Cummings 模型中初始原子相干性对辐射场压缩的影响

徐 明

(西北大学物理系, 西安 710069)

周 沧 涛

(北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

提 要

本文研究了任意初态的双光子 Jaynes-Cummings 模型的一般演化规律, 着重于分析初始原子相干性对辐射场压缩行为的影响, 作为例子, 讨论了一个任意初态的二能级原子与真空态和相干态光场相互作用时辐射场的压缩。数值计算了各种条件下辐射场压缩的时间演化。

关键词: Jaynes-Cummings 模型, 压缩, 初始原子相干性。

一、引 言

描述二能级原子与辐射场相互作用的 Jaynes-Cummings 模型(缩写为 J-C 模型)^[1]中的压缩效应是近年来量子光学领域中的一个引人注目的问题^[2~7], 由于实际系统中初始原子相干性往往是真实存在的^[8], Zhao^[3] 等人对单光子 J-C 模型中初始原子相干性对辐射场压缩的影响作了全面的讨论, 得到了增强的压缩。文献[5~7]讨论了双光子 J-C 模型中初始原子相干性的影响, 但其具体计算只涉及了初始原子处于基态的情况^[5, 6], 而文献[7]的讨论局限在系统哈密顿量的第 n 个子空间。因而初始原子相干性究竟对辐射场的压缩有什么样的影响? 考虑原子初始相干性能否在双光子 J-C 模型中也得到增强的压缩? 什么条件下有最佳压缩等问题就值得研究。

本文由系统的演化算符出发, 得到了任意时刻场的密度矩阵的一般形式, 由此计算了场的压缩, 讨论了初始原子相干性与场的压缩行为的关系。

二、双光子 J-C 模型的一般理论

双光子 J-C 模型的哈密顿量为^{*[4, 9]}

$$\left. \begin{aligned} H &= H_0 + H_i, \\ H_0 &= \hbar\omega(a^\dagger a + \sigma_z), \quad H_i = \hbar\lambda(\sigma^+ a + a^2 \sigma^-), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 a, a^+ 分别为单模场的湮灭、产生算子。 σ_z 和 σ^\pm 分别是二能级原子的反转算子和能级升、降算子。 ω 为单模场频率。 ω_0 为原子频率间隔。 容易验证以下对易关系

$$[H, H_0] = [H, H_i] = [H_0, H_i] = 0. \quad (2)$$

定义相互作用表象中的演化算符

$$|\psi_I(t)\rangle = U_I(t, 0) |\psi_I(0)\rangle. \quad (3)$$

考虑到(2)式得到

$$U_I(t, 0) = \exp(-iH_i t/\hbar). \quad (4)$$

在二能级原子的二维子空间中表示为

$$\begin{aligned} U_I(t, 0) &= \exp[-i\lambda(a^2\sigma^+ + a^{+2}\sigma^-)t] \\ &= \begin{pmatrix} \cos \lambda t \sqrt{\nu} & -i a^2 \nu^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \\ -i a \nu^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu} & \cos \lambda t \sqrt{\nu'} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

式中 $\nu = a^2 a^{+2}$, $\nu' = a^{+2} a^2$ 。 在相互作用表象中场的约化密度矩阵为

$$\rho_f(t) = \text{Tr}_{\text{atom}} \left[U_I(t, 0) \begin{pmatrix} \rho_{aa} & \rho_{ab} \\ \rho_{ba} & \rho_{bb} \end{pmatrix} \otimes \rho_f(0) U_I^\dagger(t, 0) \right], \quad (6)$$

式中 $\rho_f(0)$ 为场的初始密度矩阵, $\rho_{\alpha, \beta}$ ($\alpha, \beta = a, b$) 为初始原子密度矩阵元, 由于要考虑初始原子相干性, 保留了所有 4 个矩阵元, 假定原子处于纯态, 则有

$$\left. \begin{aligned} \rho_{aa} + \rho_{bb} &= 1, \\ \rho_{ab} &= \pm |\rho_{ab}| \exp(i\phi_{ab}) = \sqrt{\rho_{aa}(1-\rho_{aa})} \exp(i\phi_{ab}), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由(6)式运算得到

$$\begin{aligned} \rho_f(t) &= \rho_{aa} [\cos \lambda t \sqrt{\nu} \rho_f(0) \cos \lambda t \sqrt{\nu} + a^{+2} \nu^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu} \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu} \nu^{-1/2} a^2] \\ &\quad + \rho_{bb} [\cos \lambda t \sqrt{\nu'} \rho_f(0) \cos \lambda t \sqrt{\nu'} + a^2 \nu'^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \nu'^{-1/2} a^{+2}] \\ &\quad + i \rho_{ab} [\cos \lambda t \sqrt{\nu} \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \nu'^{-1/2} a^{+2} - a^{+2} \nu^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu'} \rho_f(0) \cos \lambda t \sqrt{\nu'}] \\ &\quad + i \rho_{ba} [\cos \lambda t \sqrt{\nu'} \rho_f(0) \sin \lambda t \sqrt{\nu} \nu^{-1/2} a^2 - a^2 \nu'^{-1/2} \sin \lambda t \sqrt{\nu} \rho_f(0) \cos \lambda t \sqrt{\nu}]. \end{aligned} \quad (8)$$

由(8)式出发可以讨论任意初态的双光子 J-C 模型中辐射场的量子统计性质。 本文着重于讨论场的压缩行为, 考虑场的两个正交分量。

$$x_1 = (a + a^+)/2, \quad x_2 = (a - a^+)/2i. \quad (9)$$

它们的方差表示为

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \langle \Delta x_1^2 \rangle(t) \\ \langle \Delta x_2^2 \rangle(t) \end{array} \right) &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_n n \langle n | \rho_f(t) | n \rangle \pm \frac{1}{2} \text{Re} \sum_n \sqrt{n(n-1)} \langle n | \rho_f(t) | n-2 \rangle \\ &\quad - \left(\begin{array}{l} \text{Re}^2 \sum_n \sqrt{n} \langle n | \rho_f(t) | n-1 \rangle \\ \text{Im}^2 \sum_n \sqrt{n} \langle n | \rho_f(t) | n-1 \rangle \end{array} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

对于任意给定的辐射场及原子的初态, 只需将初始密度算符代入(8)和(10)式就可深入地讨论辐射场的压缩。

三、辐射场初态为真空态

辐射场的初始密度矩阵为

$$\rho_f(0) = |0\rangle\langle 0|, \quad (11)$$

将(11)式代入到(8)式得到不为零的矩阵元为

$$\left. \begin{aligned} \rho_{f0,0}(t) &= 1 - \rho_{aa} \sin^2 \sqrt{2} \lambda t, & \rho_{f0,2}(t) &= i |\rho_{ab}| \exp(-i\phi_{ab}) \sin \sqrt{2} \lambda t, \\ \rho_{f2,2}(t) &= \rho_{aa} \sin^2 \sqrt{2} \lambda t, & \rho_{f2,0}(t) &= -i |\rho_{ab}| \exp(i\phi_{ab}) \sin \sqrt{2} \lambda t. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

由(10)式得方差表达式

$$\langle \Delta x_{1,2}^2 \rangle(t) = \frac{1}{4} + \rho_{aa} \sin^2 \sqrt{2} \lambda t \pm \frac{\sqrt{2}}{2} |\rho_{ab}| \sin \phi_{ab} \sin \sqrt{2} \lambda t, \quad (13)$$

(13)式表明初始原子相干性对辐射场噪声的压缩有非常重要的作用。当 $\rho_{aa}=0$ 或 1 时, 根本无压缩; 当 $\phi_{ab}=0$ 时, 亦无压缩; 当 $\phi_{ab}=(\pi/2)$, $t_k = [k + (1/2)] / (\pi\sqrt{2}\lambda)$ (k 为奇数), 且 $\rho_{aa}=(1/2) - (\sqrt{6}/6)$ 时, x_1 分量有最佳压缩: $\langle \Delta x_1^2 \rangle \approx 0.1376$, 压缩幅度为 45%, 这比单光子 J-C 模型中场初态为真空态时场的最佳压缩 25% 要大, 说明双光子 J-C 模型能够更好地抑制辐射场的噪声。与文献[2]的结果一致, 但这里的讨论对初始原子态未加任何限制, 适用范围更广。

四、辐射场初态为相干态

初态密度矩阵为

$$\rho_f(0) = \sum_{n,m} e^{-|\alpha|^2} (\alpha^n \alpha^{*m})^{-1/2} |\alpha^n \alpha^{*m}\rangle \langle n| \langle m|, \quad (14)$$

由(8)式得

$$\begin{aligned} \rho_{fn,m}(t) &= \langle n | \rho_f(t) | m \rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2} \left\{ \rho_{aa} \{ \alpha^n \alpha^{*m} (n! m!)^{-1/2} \cos \omega_{n+2} t \cos \omega_{m+2} t \right. \\ &\quad + \alpha^{n-2} \alpha^{*m-2} [(n-2)! (m-2)!]^{-1/2} \sin \omega_n t \sin \omega_m t \} \\ &\quad + \rho_{bb} \{ \alpha^n \alpha^{*m} (n! m!)^{-1/2} \cos \omega_n t \cos \omega_m t \\ &\quad + \alpha^{n+2} \alpha^{*m+2} [(n+2)! (m+2)!]^{-1/2} \sin \omega_{n+2} t \sin \omega_{m+2} t \} \\ &\quad + i \rho_{ab} \{ \alpha^n \alpha^{*m+1} [n! (m+2)!]^{-1/2} \cos \omega_{n+2} t \sin \omega_{m+2} t \\ &\quad - \alpha^{n-2} \alpha^{*m} [(n-2)! m!]^{-1/2} \sin \omega_n t \cos \omega_m t \} \\ &\quad + i \rho_{ba} \{ \alpha^n \alpha^{*m-2} [n! (m-2)!]^{-1/2} \cos \omega_n t \sin \omega_m t \\ &\quad - \alpha^{n+2} \alpha^{*m} [(n+2)! m!]^{-1/2} \sin \omega_{n+2} t \cos \omega_{m+2} t \}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中 $|\alpha|^2$ 为初始相干态辐射场的平均光子数, $\omega_n = \sqrt{n(n-1)}\lambda$, 假定 α 为实数, 取各组不同的 α , ρ_{aa} 和 ϕ_{ab} 的值, 将(15)式代入(10)式计算方差 $\langle \Delta x_{1,2}^2 \rangle(t)$ 的时间演化。

图 1(a)~(d) 为各种条件下方差 $\langle \Delta x_1^2 \rangle(t)$ 随无量纲时间 $\tau = \lambda t$ 的演化曲线, 图中的一条横线为 $(\Delta x_1)^2 = (1/4)$, 当曲线位于该横线以下时, x_1 分量有压缩, 反之则 x_1 分量无压缩, 图 1(a) 为 $\alpha=1$, $\phi_{ab}=(\pi/2)$, 取几个不同的 ρ_{aa} 值得到的 $\langle \Delta x_1^2 \rangle(\tau)$ 曲线, 可见对 $\langle \Delta x_1^2 \rangle(\tau)$ 的短时间行为而言, $\rho_{aa}=1$ 时并无压缩, 最佳压缩出现在 $\rho_{aa} \approx 0.18$ 时(参看图 1(d)), 最大压缩幅

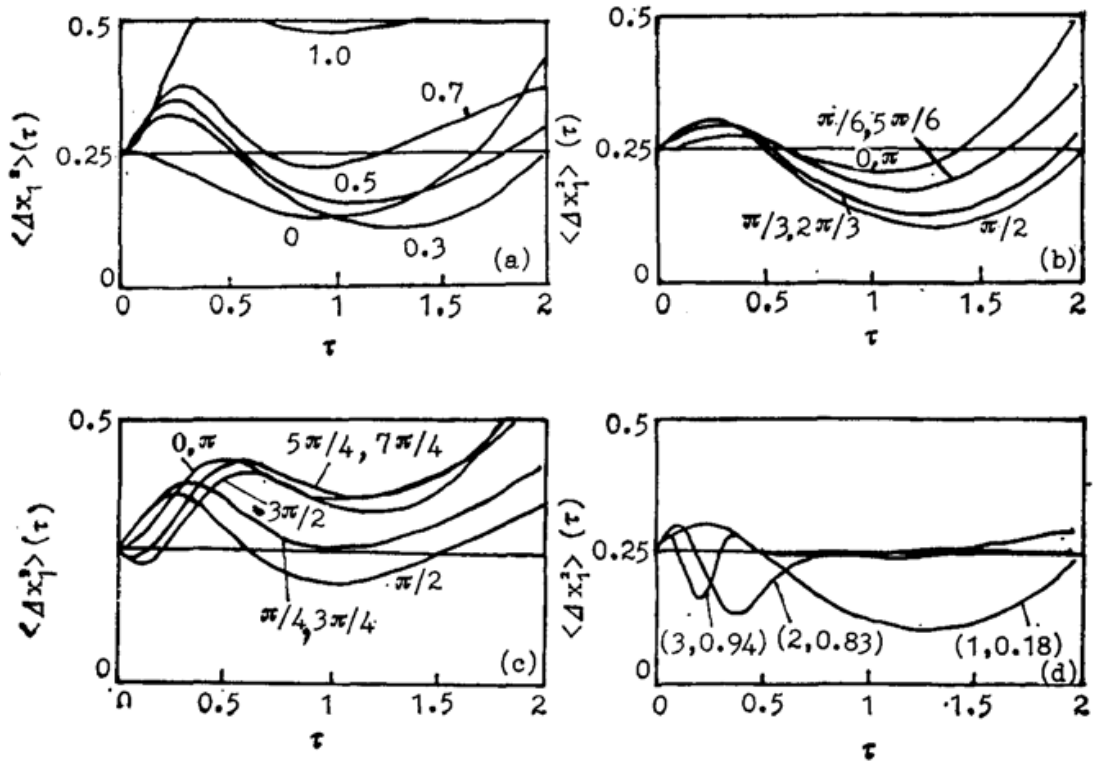


Fig. 1 Time evolution of $\langle \Delta x_1^2 \rangle(\tau)$

- (a) For $\alpha=1$, $\phi_{ab}=\frac{\pi}{2}$, and ρ_{aa} as indicated;
 (b) For $\alpha=1$, $\rho_{aa}=0.2$, and ϕ_{ab} as indicated;
 (c) For $\alpha=1$, $\rho_{aa}=0.6$, and ϕ_{ab} as indicated;
 (d) For $\phi_{ab}=\frac{\pi}{2}$ and taking α and ρ_{aa} as indicated. The pairs (α, ρ_{aa}) have been chosen so as to give optimum squeezing.

度约为 55%，而单光子 J-C 模型的相应最大幅度为 30%^[3]；图 1(b) 为 $\alpha=1$, $\rho_{aa}=0.2$ ，取不同的 ϕ_{ab} 值时 $\langle \Delta x_1^2 \rangle(\tau)$ 的时间演化，最佳压缩出现在 $\phi_{ab}=(\pi/2)$ ；图 1(c) 为 $\alpha=1$, $\rho_{aa}=0.6$ 时取不同的 ϕ_{ab} 值时 x_1 分量的方差的演化， $\phi_{ab}<(\pi/4)$ 时， x_1 分量无压缩， $\phi_{ab}=(\pi/2)$ 时，压缩幅度最大，随着辐射场场强的增加 (α 的增大)，压缩幅度减小，并且最佳压缩所对应的原子布居差增大，如图 1(a) 所示；图 1(d) 中 $\phi_{ab}=(\pi/2)$ ，而 α, ρ_{aa} 的选取是为了得到最佳压缩， $\alpha=2$ 时，最佳压缩对应于 $\rho_{aa}\approx 0.83$ ， $\alpha=3$ 时最佳压缩对应于 $\rho_{aa}\approx 0.94$ ，这些 ρ_{aa} 值较单光子 J-C 模型的相应值为小^[3]，也就是说要得到最佳压缩，双光子 J-C 模型较单光子 J-C 模型所对应的初始原子布居差小。

四、结 束 语

本文讨论了双光子 J-C 模型中的压缩。结果表明：(1) 无论初态为真空态或相干态，考虑初始原子相干性能够得到增大的压缩；(2) 双光子 J-C 模型的压缩幅度比单光子 J-C 模型的压缩幅度大；(3) 最佳压缩幅度所对应的 ρ_{aa} 值随着 α 的增大而增大；(4) ϕ_{ab} 值对压缩的影响很大，最佳压缩对应的 ϕ_{ab} 值约为 $(\pi/2)$ 。

参 考 文 献

[1] E. J. Jaynes *et al.*; *Proc. IEEE*, 1963, 51, No. 1 (Jan), 89~109.

- [2] K. Wodiewiz *et al.*; *Phys. Rev (A)*, 1987, **35**, No. 6(Mar), 2567~2577.
- [3] F. X. Zhao *et al.*; *Phys. Lett. (A)*, 1989, **139**, No. 9(Jun), 478~484.
- [4] C. C. Gerry; *Phys. Rev. (A)*, 1988, **37**, No. 7(Apr), 2683~2686.
- [5] 周鹏等;《物理学报》,1989, **38**, No. 12(Dec), 2044~2048。
- [6] 周鹏等;《光学学报》,1990, **10**, No. 9(Sep), 837~844。
- [7] 顾樵;《物理学报》,1988, **37**, No. 5(May), 751~759。
- [8] M. O. Scully; *Phys. Rev Lett.*, 1985, **55**, No. 25(Dec), 2802~2805.
- [9] X. Yang *et al.*; *Phys. Lett. (A)*, 1989, **138**, No. 8 (Jul), 409~411.

Influence of initial atomic coherence on squeezing of radiative field in the two-photon Jaynes-Cummings model

XU XING

(*Department of Physics, Northwestern University, Xian 710069*)

ZHOU CANGTAO

(*Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088*)

(Received 17 September 1990; revised 28 March 1991)

Abstract

In this paper, the general evolution laws of the two-photon Jaynes-Cummings model with initially arbitrary states have been investigated. And the emphasis is put on the influence of the initial atomic coherence on the squeezing of radiative field in the two-photon Jaynes-Cummings model. As an example, the squeezing of the field in the interaction of a two-level atom of arbitrary initial states with the vacuum and coherent field is studied, and the squeezing of the field under various conditions has been calculated numerically.

Key words: Jaynes-Cummings model, squeezing, initial atomic coherence.