

# 用光折变晶体 $\text{LiNbO}_3:\text{Fe}$ 进行 全光矩阵乘法运算\*

武原庆 刘军民 许京军 刘思敏 张光寅

(南开大学物理系, 天津 300071)

## 提 要

本文利用  $\text{LiNbO}_3:\text{Fe}$  晶体中的四波混频完成了矩阵-矢量和矩阵-矩阵乘法运算。代表矩阵元素的光点强度小于  $100 \mu\text{W}/\text{mm}^2$ , 响应时间为秒的量级。文中还讨论了两个影响运算精度的光折变效应。

关键词: 光折变非线性, 四波混频, 矩阵相乘。

## 一、引 言

由于用光折变非线性光学的方法进行全光运算是并行运算, 且它可处理频谱极宽的数据信息, 因此, 光折变全光计算成为一个十分引人注目的研究领域。Yeh 和 Chiou<sup>[1]</sup>首次于 1987 年利用  $\text{BaTiO}_3$  的四波混频来完成象素、象素相乘, 然后再用柱透镜完成这些象素乘积的求和来完成矩阵-矢量乘实验。这种矩阵-矢量相乘能通过复合光的方法扩展成矩阵-矩阵相乘<sup>[2]</sup>。另一种矩阵-矩阵相乘的方法是利用四波混频进行空间卷积运算来实现, Chiou 和 Nguyen 用  $\text{BaTiO}_3$  晶体实现了这种矩阵-矩阵相乘<sup>[3]</sup>。对光学计算的应用来说, 光折变晶体的光强响应必须足够低, 以便从一给定的激光器得到大量的小光束单元来完成高阶矩阵相乘。因此, 寻找光强响应低的晶体是很重要的。实验发现掺 Fe 浓度为 0.1 wt% 的  $\text{LiNbO}_3$  晶体光响应强度低于  $100 \mu\text{W}/\text{mm}^2$ 。还发现有两个光折变效应——光感应光散射<sup>[4]</sup>和自散焦效应<sup>[5]</sup>对实验精度有很大影响。

## 二、矩阵-矢量相乘

### 1. 光折变晶体中四波混频的乘法操作

光折变晶体中的四波混频过程由稳态耦合波方程来描述。如图 1 所示, 四束频率为  $\omega$ , 偏振方向相同的光波在光折变晶体中相交, 设这四个光束的光电场为

$$E_j(\mathbf{r}, t) = A_j(\mathbf{r}) \exp[i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)] + \text{c.c.}, \quad (1)$$

式中  $j=1, 2, 3, 4$ , 且波矢满足关系  $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_3 = -\mathbf{k}_4$ 。这四束光在晶体中感应出四个折射率光栅, 其中的两个光栅, 即透射光栅和反射光栅, 是四波混频的媒介, 所导致的四波混频的耦合波方程如下<sup>[6]</sup>

收稿日期: 1990年8月6日; 收到修改稿日期: 1991年1月2日

\* 国家自然科学基金高技术基金资助的项目。

(1) 透射光栅起主导作用的四波混频的耦合方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= -\frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_4^* + A_2^* A_3) A_4 - \alpha A_1, \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= -\frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_4^* + A_2^* A_3) A_3^* + \alpha A_2^*, \\ \frac{dA_2}{dz} &= \frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_4^* + A_2^* A_3) A_2 + \alpha A_3^*, \\ \frac{dA_4^*}{dz} &= \frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_4^* + A_2^* A_3) A_1^* - \alpha A_4^*, \\ \gamma &= \frac{i\omega n_I \exp(-i\phi_I)}{2c \cos \theta}, I_0 = \sum_{i=1}^4 |A_i|^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

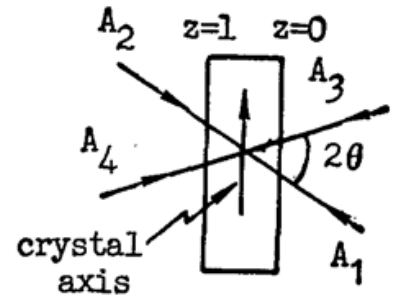


Fig. 1 The diagram of the four-wave mixing

式中  $n_I$  为折射率光栅振幅,  $\phi_I$  为光栅与干涉条纹间的空间位相差,  $c$  为光速;  $\theta$  为光速间夹角。

(2) 反射光栅起主导作用的四波混频的耦合方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{dA_1}{dz} &= \frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_3^* + A_2^* A_4) A_3 - \alpha A_1, \\ \frac{dA_2^*}{dz} &= \frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_3^* + A_2^* A_4) A_4^* + \alpha A_2^*, \\ \frac{dA_3^*}{dz} &= \frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_3^* + A_2^* A_4) A_1^* + \alpha A_3^*, \\ \frac{dA_4}{dz} &= \frac{\gamma}{I_0} (A_1 A_3^* + A_2^* A_4) A_2 - \alpha A_4, \\ \gamma &= -\frac{i\omega n_{II} \exp(i\phi_{II})}{2c \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在 LiNbO<sub>3</sub>:Fe 晶体中, 电子的输运过程中扩散机制占主导地位, 从而  $\phi_I = \phi_{II} = (\pi/2)^{[7]}$ , 因而  $\gamma$  为实数, 在无吸收近似下 ( $\alpha=0$ ), 以上两个方程组可严格求解<sup>[3]</sup>。

对于(2)式即透射光栅起主导作用时, 其共轭波反射率为

$$R = \left| \frac{A_3(0)}{A_4^*(0)} \right|^2 = \left| \frac{-2cT}{\Delta T + (\Delta^2 + 4|c|^2)^{1/2}} \right|^2, \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} A_3(l) &= 0, I_1 + I_4 = \text{const} = I_1(0) + I_4(0), I_2 + I_3 = \text{const} = I_2(l), \\ \Delta &= (I_2 + I_3) - (I_1 + I_4) = I_2(l) - I_1(0) - I_4(0), \\ I_0 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = I_1(0) + I_2(l) + I_4(0), \\ Q &= (\Delta^2 + 4|c|^2)^{1/2}, \mu = (\gamma Q / 2I_0), T = \tanh \mu l, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$|c|^2$  由下列方程决定

$$\begin{aligned} &[|c|^2 - I_1(0)I_2(l)] |\Delta T + (\Delta^2 + 4|c|^2)^{1/2}|^2 + 4|c|^2 |T|^2 I_4(0)I_2(l) \\ &+ 2|c|^2 I_4(0) (\Delta^2 + 4|c|^2)^{1/2} (T + T^*) = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

用计算机得到在  $I_4 = 1.0 \text{ mW}$ ,  $I_1, I_2 < 100 \mu\text{W}$  时,  $R$  与  $I_1(0), I_2(l)$  关系的拟合曲线如图 2 所示。当  $I_4 \gg I_1, I_2, I_3$  时, 所以有

$$\Delta \doteq -I_4(0), Q \doteq I_4(0), \mu \doteq (\gamma/2), I_0 \doteq I_4(0), \quad (7)$$

则(6)式可简化为

$$|c|^2 = [(1-T)/(1+T)]^2 I_1(0)I_2(l). \quad (8)$$

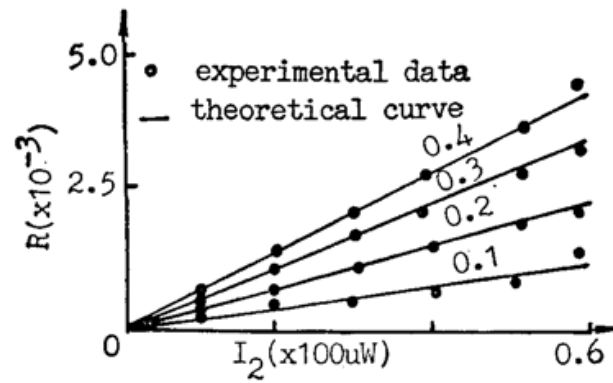


Fig. 2 The dependence of the phase conjugate reflectivity on the pumping intensities. The theoretical fitting curves are obtained for  $\gamma l = -1$ ,  $I_4 = 1.0 \text{ mW}$ . The numerical values above each curves correspond to the intensities of  $I_1 (\times 100 \mu \text{W})$

进而由(4)式得

$$R \doteq \left( \frac{1 - \exp(-\gamma l)}{I_4(0) \exp(\gamma l)} \right)^2 I_1(0) I_2(l) \propto I_1(0) I_2(l). \quad (9)$$

对于(3)式, 即反射光栅起主导作用时, 其共轭波反射率为

$$R = \frac{I_2(l)}{I_4(0)} \tanh^2[|g_0| \mu(l)],$$

$$\tanh^2[|g_0| \mu(l)] = \frac{I_1(0) I_4(0) [1 - \exp(-\gamma l)]^2}{\{I_1(0) + [I_2(l) + I_4(0)] \exp(-2l)\}^2 + I_1(0) I_4(0) [1 - \exp(-\gamma l)]^2}, \quad (10)$$

对  $\text{LiNbO}_3:\text{Fe}$  而言,  $|\gamma l| \sim 1$ , 从而有

$$\tanh^2[|g_0| \mu(l)] \doteq \frac{I_1(0) [1 - \exp(-\gamma l)]^2}{I_4(0) \exp(-2\gamma l)},$$

$$R = \left[ \frac{1 - \exp(-\gamma l)}{I_4(0) \exp(-\gamma l)} \right]^2 I_1(0) I_2(l) \propto I_1(0) I_2(l). \quad (11)$$

进而

由(9)式和(11)式可见, 不论是透射光栅还是反射光栅起主导作用的四波混频, 在探测比 (probe ratio)  $q = \{I_4(0) / [I_1(0) + I_2(l)]\} \gg 1$  的条件下, 都可完成乘法操作。当  $\gamma l < 0$  时, 透射光栅起主导作用; 而当  $\gamma l > 0$  时, 反射光栅起主导作用, 而  $\gamma l$  的正负号由晶体的晶轴方向, 耦合光的偏振方向决定(即由有效电光系数  $\gamma_{\text{eff}}^{[8,9]}$  决定)。

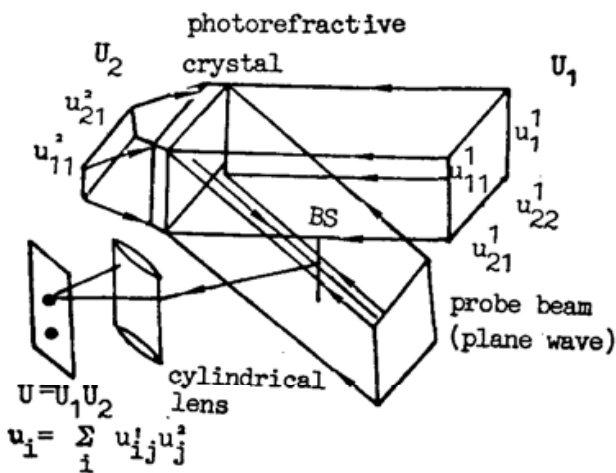


Fig. 3 The conceptual diagram of matrix-vector multiplication

## 2. 利用象束-象束相乘实现矩阵-矢量乘法

图3是矩阵-矢量相乘的原理图。矩阵和矢量的元素是通过两个相反方向传播的光束中的小孔屏幕进行编码, 再用一束准直的强光作为探测光。实验中采用  $1.5 \text{ mm}$  厚的  $\text{LiNbO}_3:\text{Fe}$  晶体进行象束-象束相乘。这些乘积由探测光“读出”, 通过柱透镜会聚, 在柱透镜焦平面上完成求和操作, 最后实现矩阵-矢量乘法, 实验装置如图4所示。图5为  $2 \times 2$  矩阵和  $2 \times 1$  矢量的相乘结果。为简单起见, 实验中用粗光束来代替柱透镜  $L_1$ ,  $L_2$  的扩束作用。

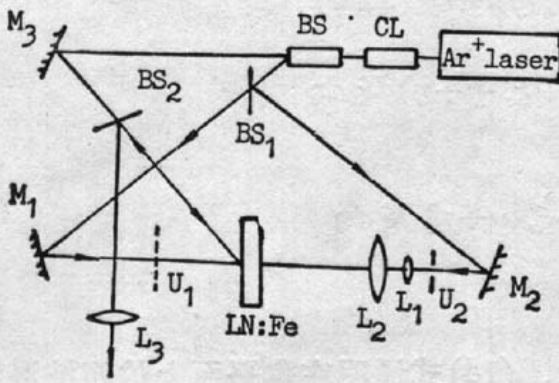


Fig. 4 The experimental set up for matrix-vector multiplication

$M_1, M_2, M_3$  are mirrors;  $L_1, L_2, L_3$  are cylindrical lenses;  $BS, BS_1, BS_2$  are beam splitters.  $CL$  is the collimator

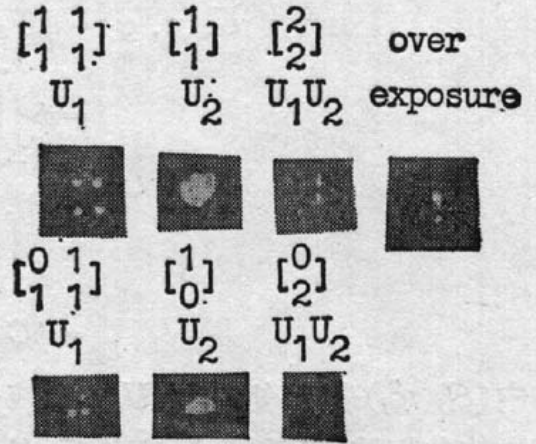


Fig. 5 The operation of matrix-vector multiplication.

### 三、矩阵-矩阵相乘

#### 1. 利用四波混频进行的卷积和相关操作

White 和 Yariv 证明了可以用四波混频完成两个图形的相关和空间卷积运算<sup>[10]</sup>。这个实验中使用的光折变晶体为  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  晶体。其原理如图 6 所示。物平面的输入振幅  $U_1(x, y)$ 、 $U_2(x, y)$  和  $U_3(x, y)$  通过傅里叶变换在共同的焦平面上分别为  $u_1, u_2, u_3$  ( $u_3 \gg u_1, u_2$ )。这三束光在晶体中耦合, 产生四波混频,  $u_3$  的共轭波  $u_4$  通过透镜  $L_3$  进行反傅里叶变换, 变为  $U_4(x, y)$ , 它可以写成如下形式<sup>[10]</sup>

$$U_4(x, y) = \psi U_3(x, y) \star [U_1(x, y) \otimes U_2(x, y)], \quad (12)$$

其中  $\psi$  为一个变换常数;  $\star$  和  $\otimes$  分别为相关和卷积运算。

当  $U_1, U_2$  是矩阵元编码屏,  $U_3$  是一小孔 ( $\delta$  函数) 时, 则可得到

$$O(x, y) = U_1(x, y) \otimes U_2(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} U_1(\xi, \eta) U_2(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = \sum_{i,j,i',j'} a_{ij} b_{i'j'} \delta(x - \xi_{i'}^1 - \xi_{j'}^2, y - \eta_{i'}^1 - \eta_{j'}^2), \quad (13)$$

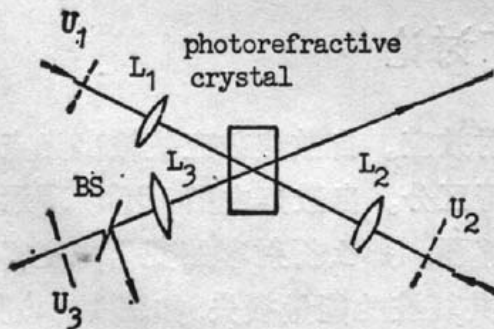


Fig. 6 The conceptual diagram of the matrix-matrix multiplication using convolution

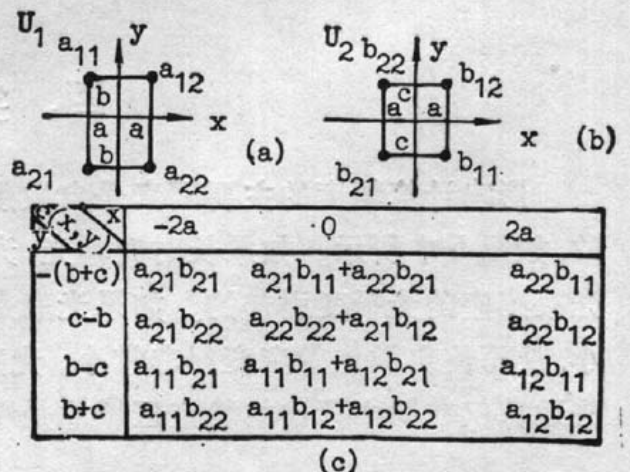


Fig. 7 The convolution of  $U_1$  and  $U_2$



$$\begin{aligned}
 U_4(x, y) &= \psi U_3(x, y) \star [U_1(x, y) \otimes U_2(x, y)] \\
 &= \psi \iint_{-\infty}^{\infty} U_3(\xi, \eta) C(x+\xi, y+\eta) d\xi d\eta \\
 &= \psi \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi, \eta) C(x+\xi, y+\eta) d\xi d\eta \\
 &= \psi C(x, y),
 \end{aligned} \tag{14}$$

式中 $(\xi_i, \eta_{ij}^2)$ 表示矩阵屏 $U_r$ 上第 $ij$ 个元素的坐标。(14)式说明在焦平面上的四波混频所产生的共轭波,经透镜 $L_3$ 变换后,输出的振幅为 $U_1, U_2$ 的卷积。

如果 $U_1, U_2$ 为图7(a)、(b)所示的矩阵,则它们的卷积如图7(c)所示(比例常数 $\psi$ 省略)由图7(c)可见,卷积的中间一列对应 $U_1 U_2$ 的矩阵元。

## 2. 利用空间卷积实现矩阵-矩阵相乘

实验装置如图8所示。 $U_1, U_2$ 屏上小孔的水平距离 $2a=1.5$  mm,垂直距离分别为 $2b=3$  mm,  $2c=1.5$  mm。图9(a)~(c)是矩阵相乘的实验结果\*。

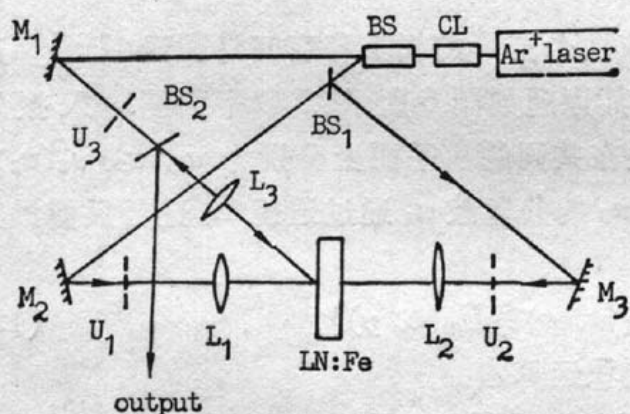


Fig. 8 The experimental set-up of matrix-matrix multiplication

$M_1, M_2, M_3$  are mirrors;  $L_1, L_2, L_3$  are spherical lenses with equal focuses;  $U_1, U_2, U_3$  are matrix masks

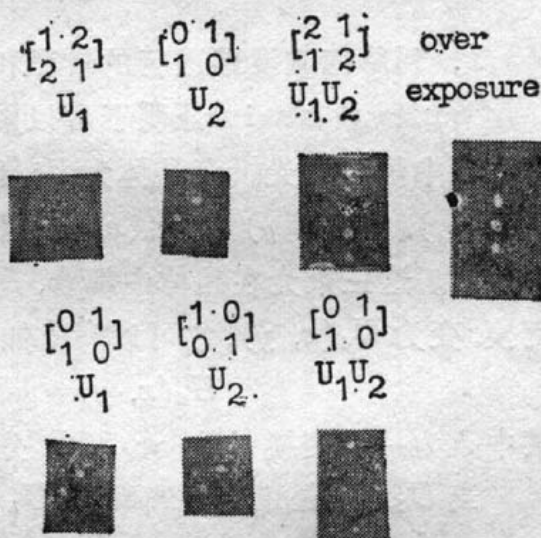


Fig. 9 The operation of matrix-matrix multiplication

## 四、实验结果和讨论

影响计算精度的主要因素是自散焦和光感应散射效应。自散焦效应使输出光点发生扩散,如图5中所示。如果长时间曝光,光点将变得不可区分。自散焦由图10(b)所示的高斯光束感应的折变引起的。如果光束是均匀的并足够弱,那么折射率的变化将变得又平又小,从而使自散焦效应变得非常小。光感应散射会使共轭波的能量损失,如图10(a)所示,乘法运算仅在图中标出的稳定区域才是精确的。如果散射足够强,稳定区域将消失。这种光感

\* 卷积中的交叉项(图7(c)的左、右两列)对矩阵相乘无贡献,故在输出时将它们滤掉了。

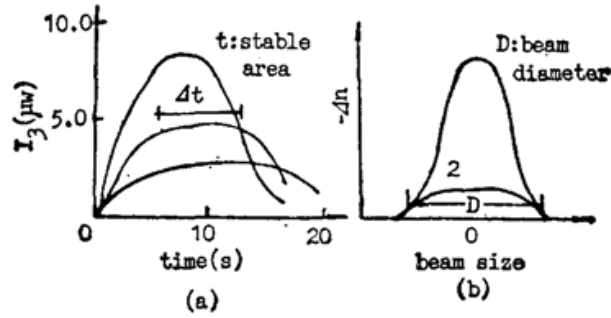


Fig. 10 The influences of the self-defocusing and light induced scattering

(a) The energy loss caused by scattering.

(b) The refraction index change caused by laser beam. 1. Index change caused by Gaussian beam.

2. Index change caused by weak uniform beam

应散射依赖于光束的直径和强度。张光寅等曾证明这种散射存在一个光束直径的阈值<sup>[11]</sup>。所以,弱强度和小直径的光束可以大大减弱光感应散射和自散焦的影响。在本实验中,象束光强小于  $100 \mu\text{W}\cdot\text{mm}^{-2}$  直径小于  $0.1 \text{ mm}$ ,得到了大于 2 秒的稳定区。另外,对于利用卷积进行的矩阵-矩阵相乘,长时间曝光将导致噪音衍射光点,如图 9 所示,这些噪音衍射点是四波混频中的透射光栅或反射光栅的高阶衍射点。由此可见,不论是矩阵-矢量相乘还是矩阵-矩阵相乘,都存在一个时间区间,只有在这个区间内,计算结果才是精确的。

## 五、结 论

利用光折变非线性光学进行的全光计算有广阔的应用前景。要使这种计算系统达到实用化水平,光折变材料的光强响应应该大大降低。实验证明,高掺 Fe 浓度 (0.1 wt%)  $\text{LiNbO}_3$  晶体在这个领域具有巨大潜力。

感谢张春平副教授,李兵老师和崔玉芬老师在实验中给予的帮助。

## 参 考 文 献

- [1] P. Yeh, A. E. Chiou; *Opt. Lett.*, 1987, **12**, No. 2 (Feb), 138.
- [2] A. E. Chiou, M. Khoshnevisan *et al.*; *Proc. SPIE*, 1988, Vol. 881, 250.
- [3] P. Yeh *et al.*; *Opt. Engng*, 1989, **28**, No. 4 (Apr), 328.
- [4] E. M. Avakyan, K. G. Belabaev *et al.*; *Sov. Phys. Solid State*, 1983, **25**, No. 11 (Nov), 1887.
- [5] 刘思敏,张光寅等;《物理学报》, 1988, **37**, No. 2 (Feb), 268.
- [6] Mark Cronin-Golomb *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1984, **QE-20**, No.1 (Jan), 12.
- [7] D. L. Staebler, J. J. Amodei; *J. Appl. Phys.* 1972, **43**, No. 3 (Mar), 1042.
- [8] Kenneth R. MacDonald *et al.*; *J. O. S. A.* 1983, **73**, No. 5 (May), 548.
- [9] Jack Feinberg *et al.*; *Appl. Phys.*, 1980, **51**, No. 3 (Mar), 1297.
- [10] J. O. White, Amnon Yariv; *Appl. Phys. Lett.*, 1980, **37**, No. 1 (Jul), 5.
- [11] Gangyin Chang *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 17 (Sep), 2955.



## All optical matrix multiplication using photorefractive LiNbO<sub>3</sub>:Fe crystal

WU YUANQING, LIU JUNMING, XU JINGJUN, LIU SIMIN AND ZHANG GUANGYIN  
(Physics Department, Nankai University, Tianjin 300071)

(Received 6 August 1990; revised 2 January 1991)

### Abstract

We have studied the matrix-vector and matrix-matrix multiplication using four-wave mixing in LiNbO<sub>3</sub>:Fe crystal. The response time of the device is in the order of a few seconds. The intensities representing the elements of matrices can be lower than 100  $\mu\text{W}/\text{mm}^2$ . We have also discussed two photorefractive effects that affect the accuracy of multiplication.

**Key words:** photorefractive nonlinearity, four-wave mixing, matrix multiplication.

### 更 正

《光学学报》1991年11卷 No. 6(Jun), 489 页“NAB 对撞增强相位共轭腔快锁模特性”一文中的图 2 示波照片应更正为如下

