

圆介质参考波导特征方程的 近似式及其应用

雪夫钦科

严方 吴芳 周逊

(苏联科学院无线电工程和电子学研究所)

(上海科学技术大学, 上海 201800)

提 要

本文将作为参考波导的圆介质波导模式的特征方程进行了有效的近似简化, 使之成为独立的四个简单特征方程组。利用这些方程组作为参考波导的特征方程来计算各种复杂波导的传输参数时, 能够大大简化计算工作。

关键词: 电介质波导, 光纤。

一、引 言

介质波导的发展沿用了电磁波导的分析方法, 但前者无论从种类、结构还是从应用广度上均比电磁波导丰富得多^[2]。可是, 迄今介质波导理论的发展却远远落后其技术应用, 这是因为以变量分离法作为解决介质波导模式分类和模式特性的主要理论方法就显得十分不够, 以致对复杂介质波导的模式分类和一些饶有兴趣的性质的分析还处于探索阶段^[2]。鉴于这种情况, 提出一种对于非圆对称和(或)非均匀和(或)各向异性介质波导的变异公式方法^[1, 2], 并获得广泛发展。这种方法利用已知参考波导(对称、均匀及各向同性)的模参数和场分布来直接计算复杂介质波导(非对称、不均匀及各向异性)的基本模参数(如截止波长、模斑尺寸及传播常数等)和场分布非常简单、有效。本文的目的是为了简化作为参考波导的特征方程, 从而使变异公式方法的计算更为简单。但这些简化方程同样可以运用到耦合波方程法或微扰法等理论方法中。

二、在矢量有效近似方法中的应用

本文采用的相对折射率的定义和定义域如下, 在光纤实际应用中它小于 10^{-2} 。

$$\Delta_0 = (\epsilon_e - \epsilon_0) / 2\epsilon_0 \ll 1. \quad (1)$$

式中 ϵ_e 和 ϵ_0 分别为介质光波导(例如光纤)芯层和包层的介电常数。一种已知的圆介质波导模式的特征方程为:

$$\left(\frac{J'_\nu}{uJ_\nu} + \frac{K'_\nu}{wK_\nu} \right) \left(\frac{J'_\nu}{uJ_\nu} (1+2\Delta_0) + \frac{K'_\nu}{wK_\nu} \right) = \nu^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right) \left(\frac{1+2\Delta_0}{u^2} + \frac{1}{w^2} \right). \quad (2)$$

式中, $J_\nu = J_\nu(u)$ 、 $K_\nu = K_\nu(w)$ 、 $J'_\nu = J'_\nu(u)$ 、 $K'_\nu = K'_\nu(w)$ 分别为贝塞尔函数、修正贝塞尔函数及其导数; u 和 w 为横波数。当 $\nu \neq 0$ 计算(2)式时, 可变换成下列形式:

$$[R_{-\nu} + (1 + \Delta_0)S_{-\nu}] [R_{\nu} + (1 + \Delta_0)S_{\nu}] = \Delta_0^2 S_{-\nu} S_{\nu}, \quad (3)$$

$$[R_{-\nu} + (1 - \Delta_c)S_{-\nu}^{-1}] [R_{\nu}^{-1} + (1 - \Delta_c)S_{\nu}^{-1}] = \Delta_c^2 S_{-\nu}^{-1} S_{\nu}^{-1}.$$

$$\Delta_c = (\epsilon_0 - \epsilon_1) / 2\epsilon_0 = \Delta_0 (1 + 2\Delta_0)^{-1}, \quad \Delta_c < \Delta_0, \quad (4)$$

$$R_{\nu} = \frac{uJ_{\nu}(u)}{J_{\nu+1}(u)}, \quad R_{-\nu} = \frac{uJ_{-\nu}(u)}{J_{-\nu+1}(u)} = \frac{uJ_{\nu}(u)}{J_{\nu-1}(u)}, \quad (5)$$

$$S_{\nu} = \frac{wK_{\nu}(w)}{K_{\nu+1}(w)}, \quad S_{-\nu} = \frac{wK_{-\nu}(w)}{K_{-\nu+1}(w)} = \frac{wK_{\nu}(w)}{K_{\nu-1}(w)}, \quad (6)$$

$$S_{-\nu} S_{\nu} = w^2 \begin{cases} f_{\nu}(w), & \text{当 } w \rightarrow 0 \\ 1, & \text{当 } w \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (7)$$

$$f_{\nu}(w) = \frac{1}{\nu} \begin{cases} [2 \ln(1.123/w)]^{-1}, & \text{当 } \nu = 1 \\ \nu - 1, & \text{当 } \nu \geq 2. \end{cases} \quad (8)$$

为了具体了解函数 $S_{\nu}(w)$ 和 $S_{-\nu}(w)$ 的性质, 图 1 和图 2 分别给出不同 ν 值时 $S_{\nu}(w)$ 和 $S_{-\nu}(w)S_{\nu}(w)/w^2$ 对 w 的曲线。

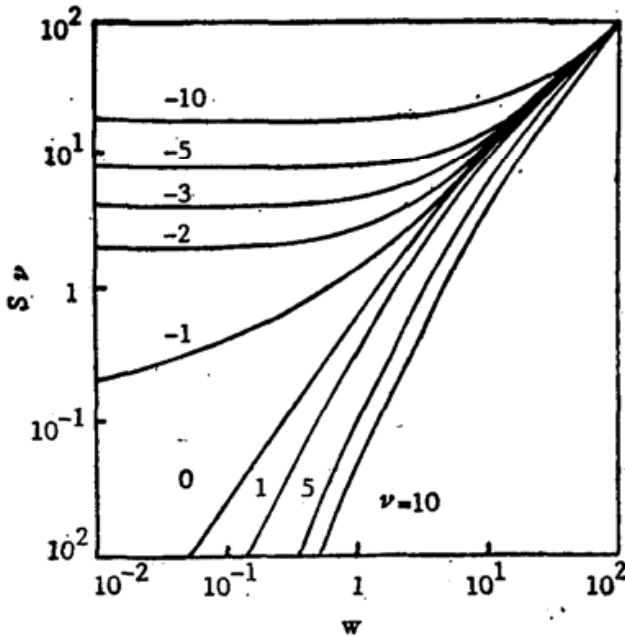


Fig. 1 Function $S_{\nu}(w)$ for some ν

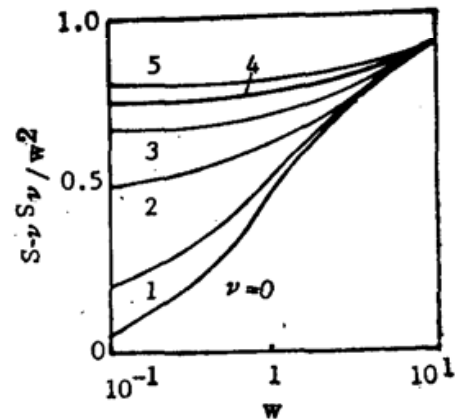


Fig. 2 Function $S_{-\nu}(w)S_{\nu}(w)/w^2$ for some ω_c

在(1)式条件下, 若略去 Δ_0 和 Δ_c 等小量, 由(3)式可导出与 LP 模特征方程的近似下或标量近似下的特征方程近似式^[4,5]完全一致的结果。在 $\Delta_0^2 \ll 1$ 条件成立时, 由(4)式可得:

$$(1 - \Delta_c)^{-1} = 1 + \Delta_0(1 + \Delta_0)^{-1} = 1 + \Delta_0 - \Delta_0^2 + \dots \quad (9)$$

若略去 Δ_0^2 和 Δ_c^2 等小量, 从(3)式、(9)式又可导出矢量有效近似式^[1,2]如下:

$$R_{\mp\nu}(u) + (1 + \Delta_0)S_{\mp\nu}(w) = 0. \quad (10)$$

式中: 取负号代表 $HE_{\nu\mu}$ 模; 取正号代表 $EH_{\nu\mu}$ 模。

三、在矢量有效近似方法中的推广应用

在验证精确公式(2)和近似式(3)中, 当满足(1)式时可将(10)式变换成拟合分析公式:

$$R_{\mp\nu}(u) + [1 + \Delta_0(1 + \Delta_0 G_{\nu\mu}^{\mp})^{-1}] S_{\mp\nu}(w) = 0. \quad (11)$$

$$G_{\nu\mu}^{\pm} = \left[\frac{2\nu w}{(\nu - 1 + 2\mu)^2 + 2\nu w} \right]^2, \quad G_{\nu\mu}^+ = 1 + \frac{4\mu^2}{\nu} \frac{6w^2}{(2\mu + w)^2}. \quad (12)$$

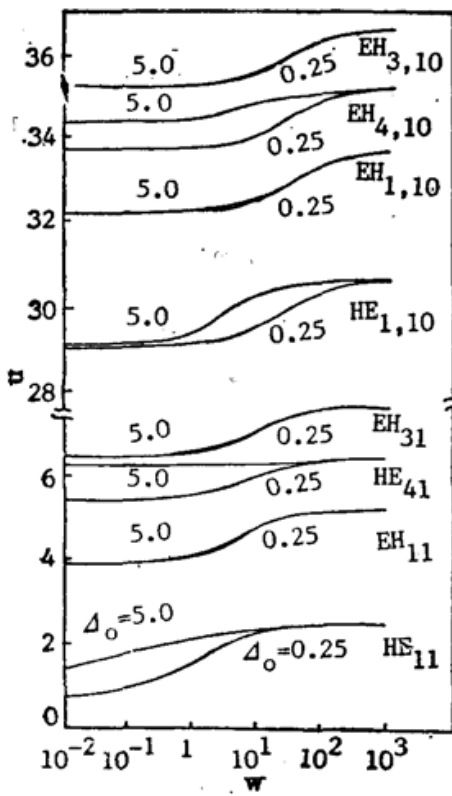


Fig. 3 Function $u(w)$ for some modes

for $\Delta_0=0.25$ from equation(10) for $\Delta_0=5.0$ from equations (11), (12)

对上列公式的计算结果表明, (11)式的精度与拟合分析函数 $G_{\nu\mu}^{\pm}$ 的依赖关系非常疏松。在某些情况下 $G_{\nu\mu}^{\pm}$ 函数可选择更为简单的形式即能满足实际要求。当 μ/ν 的值不大时可采用:

$$G_{\mu}^{-} = \left(\frac{w}{2\mu^2 + w} \right)^2, \quad G^{+} = 1. \quad (13)$$

在特殊情况下, 当 $w \rightarrow 0$ 或 $w \rightarrow \infty$ 时, 从(10)~(13)式可得到与精确(2)式完全相同的结果。计算机计算结果证明, 当 $\Delta_0 \ll 1$ 时, 矢量有效近似式(10)或(11)式能很好地接近精确表达式(2)的结果。在光纤光波导的实际应用中, $\Delta_0 < 10^{-2}$, 由(10)式或(11)式对 $HE_{\nu\mu}$ 和 $EH_{\nu\mu}$ 模算出的 $u-w$ 曲线和一般资料中的精确式(2)的曲线完全符合, 两者的误差在 10^{-5} 以下, 这里不再给出。对于一般介质波导, 为了给出和大致了解在最大应用范围内所达到的精度, 图3给出 $\Delta_0=0.25, 5.0$ 很大值时按(10)式或(11)式对 $HE_{\nu\mu}$ 和 $EH_{\nu\mu}$ 模算出的曲线。因无任何已有曲线比较, 故表1, 2给出每条曲线在取点中的最大误差 $|u_{\text{exact}} - u_{\text{approx}}|$ 值。

由上表可见, 误差能满足一般应用要求。若在大 Δ_0 要求下, 要求更高的精度, 则应在(3)式和(9)式中增加 Δ_0^2 和 Δ_0^3 项, 依次类推。

Table 1 The maximum difference $|u_{\text{ex}} - u_{\text{ap}}|$ for $HE_{\nu\mu}$ -modes

ν, μ	1, 1	4, 1	1, 10	4, 10
w	10	10	10	10
$ u_{\text{ex.}} - u_{\text{ap.}} , \Delta_0=0.25$	0.005	0.011	0.038	0.012
w	1	1	10	10
$ u_{\text{ex.}} - u_{\text{ap.}} , \Delta_0=5.0$	0.006	0.028	0.146	0.071

Table 2 The maximum difference $|u_{\text{ex}} - u_{\text{ap}}|$ for $EH_{\nu\mu}$ -modes

ν, μ	1, 1	3, 1	1, 10	3, 10
w	10	10	10	100
$ u_{\text{ex.}} - u_{\text{ap.}} , \Delta_0=0.25$	0.020	0.018	0.039	0.022
w	10	10	100	100
$ u_{\text{ex.}} - u_{\text{ap.}} , \Delta_0=5.0$	0.006	0.009	0.008	0.014

综上所述表明,当 $\Delta_0 \ll 1$ 时,式(2)可由以下已分离开的四个简单特征方程组来代替:

$$\begin{aligned}
 R_0(u) + S_0(w) &= 0, && \text{对 } H_{0z} \text{ 模;} \\
 R_0(u) + (1 + 2\Delta_0)S_0(w) &= 0, && \text{对 } E_{0\mu} \text{ 模;} \\
 R_{-v}(u) + [1 + \Delta_0(1 + \Delta_0 G_{v\mu}^-)^{-1}]S_{-v}(w) &= 0 && \text{对 } HE_{v\mu} \text{ 模;} \\
 R_v(u) + [1 + \Delta_0(1 + \Delta_0 G_{v\mu}^+)^{-1}]S_v(w) &= 0, && \text{对 } EH_{v\mu} \text{ 模;}
 \end{aligned} \tag{14}$$

上述简化方程组在实际应用中颇为重要,因为,当需计算待研究复杂介质波导的模参数和场分布时必须对参考波导的大量模式进行模参数和场分布的反复逼近计算。不言而喻,利用式(14)替代式(2)进行叠代运算可大大节省计算工作量和计算时间。

参 考 文 献

- [1] V. V. Shevchenko; *Radio Eng. & Electron. Physics.*, 1986, **31**, No. 5, 1.
- [2] 雪夫钦科;私人通风.
- [3] D. Marcuse; *«Light Transmission Optics»*, (Van Nostrand, New York, 1972).
- [4] H. G. Unger; *«Planar Optical Waveguides and Fibers»*, (Clarendon press, Oxford, 1977).
- [5] A. W. Snyder, J. D. Love; *«Optical Waveguide Theory»*, (Chapman and hall, London, New York, 1983).

On the accuracy of VS-approximation for dielectric waveguide modes

V. V. SHEVCHENKO

(Institute of Radioengineering and Electronics, USSR Academy of Sciences)

YAN FANG, WU FANG AND ZHOU XUN

(Shanghai University of Science and Technology, Shanghai 201800)

(Received 16 February 1990; revised 7 January 1991)

Abstract

In mode analysis for noncircular, inhomogeneous and anisotropic dielectric waveguides shift formula methods are widely developed. By these methods the mode parameters and fields of the investigated complex waveguide are calculated by using the known mode parameters and fields of reference waveguide, e.g. circular homogeneous and isotropic waveguide. In order to simplify the calculations of reference waveguide mode parameters, vector successful (VS) approximation is correspondingly used as well. In this paper the accuracy of this approximation is checked and some generalized VS-approximations are proposed, which are quite useful in applications.

Key words: dielectric waveguide, optical fiber.