

复杂棱镜的实际光路追迹*

王 涌 天

(北京理工大学工程光学系, 北京 100081)

提 要

本文解决了在光学软件中对各种复杂棱镜进行实际光路追迹的问题, 给出了对其中各种偏心、倾斜工作面通用的坐标变换公式, 并着重介绍了对屋脊棱镜、角反射镜等具有特殊几何光路的棱镜的光路计算方法。

关键词: 几何光学; 复杂棱镜; 光路计算。

一、引 言

目前国内流行的光学软件在计算含有棱镜元件的光学系统时, 均要求使用者把棱镜展开成平板玻璃^[1]来处理。这种方法虽然比较简单, 但在不少情况下, 如要求分析棱镜角度误差对像质的影响时, 或是在一些非对称非常规系统中必须考虑棱镜扫描对整个系统的影响时, 或是为消除像差而将棱镜中的某个工作面做成曲面时, 就暴露出了局限性, 不能满足使用者的需要。这些问题都必须通过对棱镜元件的实际光路追迹才能解决。为此, 本文讨论各种棱镜的光路计算中涉及的计算方法, 并给出相应的公式。

实际上, 绝大多数棱镜, 无论其结构如何复杂, 都可以分解成一系列相对于基准轴(即共轴系统中的光轴)偏心和倾斜的折射或反射平面(或曲面), 只要找出一种简便易行的描述偏心、倾斜面的方法, 并给出相应的坐标变换公式, 就可以实现对它们的实际光路计算。但屋脊棱镜和角反射镜的工作面由两个或三个反射子面组成, 不同的光线在这些反射子面上入射(并反射)的先后次序不同, 使其光路十分特殊。在程序中对这类棱镜必须有相应的特殊处理方法。

二、棱镜工作面的描述——面型坐标系和基准坐标系

光学系统的绝大部分结构参数都需要相对一定的直角坐标系给出。为了简明地描述含有棱镜的非对称光学系统, 可以设计两种参考坐标系, 即面型坐标系和基准坐标系, 用于确定不同种类的结构参数。图1以一个带有道威棱镜的系统为例, 示意地画出了这两种坐标系。

一个光学面(包括棱镜的各个工作面)的几何形状的结构参数是在该面的面型坐标系中确定的。面型坐标系(X, Y, Z)的原点 A 与该面的顶点重合, Z 轴与曲面顶点的法线重合, 其正向的选取要符合如下条件, 即 Z 轴与入射光束的主光线间的夹角为锐角。文献[2]中给出了光学系统中可能用到的各种复杂面型在如上定义的坐标系中的面型方程。当然在

收稿日期: 1990年10月15日; 收到修改稿日期: 1991年1月2日

* 本课题得到国家自然科学基金的资助。

绝大多数情况下, 棱镜的各工作面都是平面, 或可看作是半径为无穷大的球面。这时它的“顶点”可根据方便任意选取, 图 1 中将其选为轴上物点光束中心光线与该面的交点。

光学面在系统中的位置和方位在基准坐标系 (X_b, Y_b, Z_b) 中给出。该坐标系的原点取在轴上物点 O , $X_b - Y_b$ 平面与物面重合。在轴对称系统中, 如此确定的 Z_b 轴与光轴重合, 各光学面的顶点都将座落其上, 面型坐标系的 Z 轴与 Z_b 轴重合, 且 X, Y 轴分别平行于 X_b, Y_b 轴。对含有棱镜的非对称系统, 允许棱镜各工作面相对于基准轴偏心、倾斜, 因此两个相邻光学面 A_i 和 A_{i+1} 间的相对位置用两面顶点连线 $A_i A_{i+1}$ 在 Z_b 轴上的投影 ΔZ_{bi} 描述, 光学面的顶点位置由离轴量 $(\Delta X_b, \Delta Y_b)$ 给出, 而其方位将用方位角 $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$ 表示。这些参数的定义如图 1 和图 2 所示。在最复杂的情况下, $\Delta X_b, \Delta Y_b, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ 均不为 0, 则光学面和与其对应的面型坐标系首先从 Z_b 轴上的 A' 平移到 A 。然后绕 X_b 轴的平行轴 \hat{X} 旋转, 旋转量为 θ_x , 达到 (X', Y', Z') 的位置。接着再绕 Y' 轴转 θ_y 角成为 (X'', Y'', Z'') 。最后绕 Z'' 轴旋转 θ_z 角, 从而得到曲面的正确方位。其中对角度 $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ 的符号规定是: 逆其绕之旋转的坐标轴的正向看去, 如旋转方向为顺时针, 该角度为正, 否则为负。

图 2 中 (X'_b, Y'_b, Z'_b) 分别平行于 (X_b, Y_b, Z_b) 。可以证明, 这时面型坐标 (X, Y, Z) 与 (X'_b, Y'_b, Z'_b) 的关系为

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X'_b - \Delta X_b \\ Y'_b - \Delta Y_b \\ Z'_b \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 T 是由下式给出的正交矩阵

$$\begin{aligned} T &= T_z \cdot T_y \cdot T_x = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & -\sin \theta_x \\ 0 & \sin \theta_x & \cos \theta_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_y \cos \theta_z & \sin \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z - \cos \theta_x \sin \theta_z & \cos \theta_x \sin \theta_y \cos \theta_z + \sin \theta_x \sin \theta_z \\ \cos \theta_y \sin \theta_z & \sin \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z + \cos \theta_x \cos \theta_z & \cos \theta_x \sin \theta_y \sin \theta_z - \sin \theta_x \cos \theta_z \\ -\sin \theta_y & \sin \theta_x \cos \theta_y & \cos \theta_x \cos \theta_y \end{pmatrix}, \quad (2) \end{aligned}$$

(2) 式为通用公式, 当涉及的位置、方位参数中有一个或数个为 0 时, 该式依然成立。

用上述基准坐标系和面型坐标系相结合的方法, 可以方便地描述任意复杂棱镜(但屋脊棱镜和角反射镜属特例, 见后文)。当然, 以上方法并不局限于描述棱镜的各工作面, 对其各种偏心、倾斜元件的光学面也都适用。而(1)式则是对非对称复杂光学系统进行光路计算时所需要的坐标变换公式。

三、棱镜光路计算的一般方法

用如上方法分别描述了棱镜的各个工作面后, 对每个工作面的光路计算过程都是一样

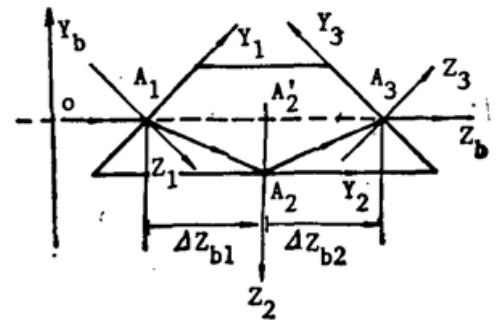


Fig. 1 Base axes and local surface axes

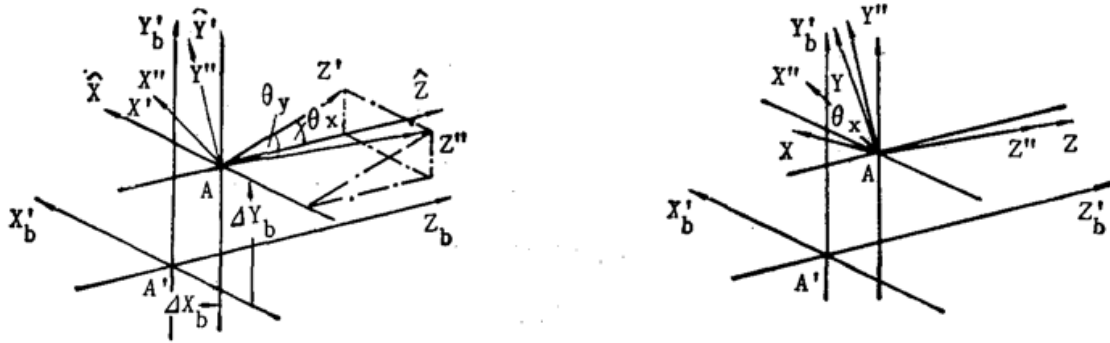


Fig. 2 Parameters specifying the position and orientation of an optical surface

的。已知量将是光线上的一个已知点 P (P 一般是光线和前一面的交点) 在基准坐标系中的坐标 (X_b, Y_b, Z_b) 和入射方向的方向余弦 (L_b, M_b, N_b) 。首先用公式

$$X'_b = X_b, Y'_b = Y_b, Z'_b = Z_b - \Delta Z_b. \tag{3}$$

将基准坐标系的原点沿 Z_b 轴移至图 2 中的 A' 点, 即使 $X'_b - Y'_b$ 平面包含当前面的顶点 A 。将 (X'_b, Y'_b, Z'_b) 代入 (1) 式, 可求出 P 点在当前面的面型坐标系中的坐标 (X, Y, Z) 。由于坐标系的平移不改变光线方向余弦的数值, 所以对 (L_b, M_b, N_b) 的坐标变换公式为

$$\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} L_b \\ M_b \\ N_b \end{pmatrix}. \tag{4}$$

从 (X, Y, Z) 和 (L, M, N) 出发, 无论当前面是一般的平面工作面或是因特殊需要而制成的曲面, 都可以用文献 [2] 中给出的标准传递公式, 求出入射光线与当前面的交点 P 的坐标 (X, Y, Z) , 进而根据当前面的工作形状, 用同一文献中给出的折射或反射公式求得出射光线的方向余弦 (L', M', N') 。然后, 再分别用公式 (1) 和 (4) 的逆向将求出的 (X, Y, Z) 和 (L', M', N') 的值变换到基准坐标中去, 为进行下一个面的光路追迹做好准备。因为 (2) 式中的 T 是正交矩阵, 即有

$$T^{-1} = T^T. \tag{5}$$

按照光线的入射次序, 将上述过程逐一地应用于棱镜的各个工作面, 即可完成对各种棱镜系统的实际光路追迹。但如前所述, 当系统中含有屋脊棱镜或角反射镜时, 由于不同的光线在这些元件的各反射面上入射 (并反射) 的次序不同, 无法唯一地确定这些面在系统中的排列次序, 从而给上述逐面进行的光路计算方法带来了困难, 必须采取特殊的处理手段。

四、屋脊棱镜和角反射镜的光路计算公式

如图 3 所示, 屋脊棱镜的屋脊面由两个 (互相垂直的) 简单反射平面组成。因为按常规分别描述这两个面时有前述的困难, 所以将这两个反射面视为一个整体, 作为一种特殊面型处理, 并把这种面型和与其对应的面型坐标的相对位置规定为: 脊棱与 Y 轴重合, 同时屋脊的底面与 $X - Y$ 面平行 (见图 3)。这样, 两个反射面的法线的方向余弦在面型坐标系中是固定的, 分别为:

$$BFG E \text{ 面: } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right); \quad CFG D \text{ 面: } \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \tag{6}$$

只需进一步用上文二中定义参数给出这个面型坐标系在系统的基准坐标系中的位置和方位,即可最后确定屋脊面在整个系统中的位置和方位。而在面型坐标系中要求输入的唯一参数是光线追迹公式(见下文)中需要用到的脊棱到底面的距离 h 。在图 3 中, h 等于棱线 FG 到平面 $BCDE$ 的距离 AH 。

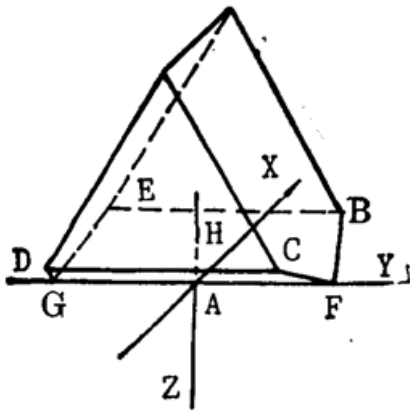


Fig. 3 The specification of a roof prism

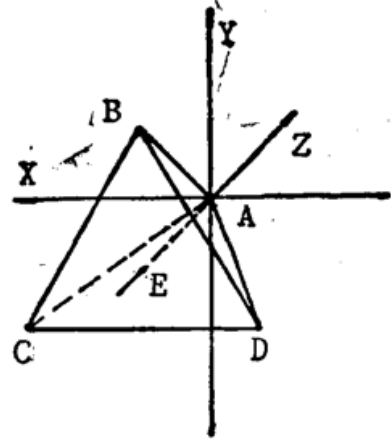


Fig. 4 The specification of a corner cube prism

角反射镜的情况类似,它由 ABC 、 ABD 和 ACD 三个反射平面组成,如图 4 所示。我们也把它们整体视为一种特殊面型,并规定其顶点 A 与面型坐标原点重合,底面 BCD 与 X - Y 平行,底面的一条棱 CD 与 X 轴平行,则三个反射面的法线的方向余弦分别固定为 ABC 面: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; ABD 面: $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$; ACD 面: $(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ 。

(7)

这样,角镜的三个面也只需输入顶点到底面距离 $h = AE$ 一个参数即可在面型坐标系中确定。从图 3 和图 4 中可以看出,各反射子面均通过面型坐标原点 A ,所以在该坐标系中它们的面型方程可以写成如下统一的形式。

$$i_m X + j_m Y + k_m Z = 0, \quad (m=1, \dots, N) \quad (8)$$

式中 (i_m, j_m, k_m) 代表各子面的法线方向余弦,屋脊面时取(6)式中各值,角镜时取(7)式中各值。 N 为子面总数,在两种情况下分别等于 2 和 3。用上述方法简明地描述了屋脊棱镜和角反射镜后,需要有相应的计算公式处理这类实际上包括二至三个子反射面的特殊面型的光线追迹问题,要求能够根据入射光线的位置和方向自动判断该光线在各子面上反射的先后次序。如果编成一个子程序,则其输入量为入射光线转换到面型坐标后的描述量,即光线上 P 点坐标 (X, Y, Z) 和方向余弦 (L, M, N) 。设光线在其入射的第 n 个子反射面上的交点为 $P_n(X_n, Y_n, Z_n)$,在该子面反射后的方向余弦为 (L_n, M_n, N_n) 。则经过 N 次反射后,子程序的输出量为出射光线的方向余弦 $(L', M', N') = (L_N, M_N, N_N)$ 和 P_N 点的坐标 (X_N, Y_N, Z_N) ,均是相对面型坐标而言。

进入子程序后,首先用传递公式计算光线与屋脊面或角镜的底面的交点 P_0 (见图 5)。传递公式的一般形式为^[2]

$$X_n = X_{n-1} + L_{n-1}e_{n-1}, Y_n = Y_{n-1} + M_{n-1}e_{n-1}, Z_n = Z_{n-1} + N_{n-1}e_{n-1} \quad (9)$$

式中取 $n=0$, 求 P_0 点坐标 (X_0, Y_0, Z_0) 。则公式右侧的 $(X_{-1}, Y_{-1}, Z_{-1}) = (X, Y, Z)$ 和 $(L_{-1}, M_{-1}, N_{-1}) = (L, M, N)$ 均为已知的输入量,而 e_{-1} 为有向线段 PP_0 的长,即

$$e_{-1} = (PP_0) = -(Z+h)/N, \quad (10)$$

式中 h 为正值, 是前述输入面型参数, 即棱镜顶部到底面的距离。在这里不考虑光线在底面的

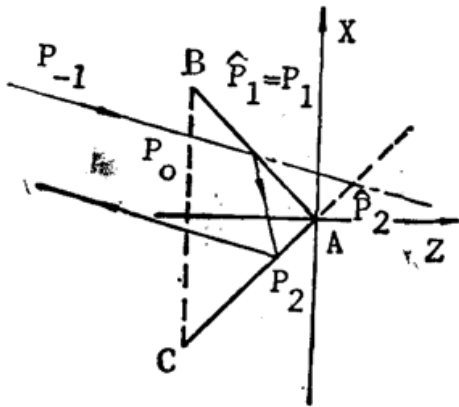


Fig. 5 Ray-trace for roof and corner cube prisms

的折射问题。因为在多数情况下该面不是实在的光学面而只是一个虚面, 如图 3 所示的直角屋脊棱镜中的屋脊底面就是如此, 这时光线通过该面不改变方向, 即 $(L_0, M_0, N_0) = (L_{-1}, M_{-1}, N_{-1}) = (L, M, N)$ 。当该底面确是一个实际的光学面时, 则应在输入数据中被独立地描述成一个普通折射平面, 其上的折射情况在进入本子程序前已经进行了计算。这时 P 点即是 P_0 点, (9) 式中 $e_{-1} = 0$, 且输入量 $(L, M, N) = (L_0, M_0, N_0)$ 为在底面折射后的光线方向余弦。无论是哪一种情况, 找出 P_0 点坐标后可写出入射光线方程

$$X = X_0 + L_0e, \quad Y = Y_0 + M_0e, \quad Z = Z_0 + N_0e. \quad (11)$$

如图 5, 若把光线看作一无限延伸的直线, 各反射子面看成无限延伸的平面, 可找出直线与各平面交点 \hat{P}_1, \hat{P}_2 等。将直线方程(11)代入各子面的面型方程(8)并加以整理, 可以得出有向线段 $P_0\hat{P}_1, P_0\hat{P}_2 \dots$ 的长度表达式, 即

$$e_{0m} = (P_0\hat{P}_m) = \frac{\hat{i}_m X_0 + \hat{j}_m Y_0 + \hat{k}_m Z_0}{\hat{i}_m L_0 + \hat{j}_m M_0 + \hat{k}_m N_0}. \quad (m=1, \dots, N) \quad (12)$$

用此式求出 e_{01}, \dots, e_{0N} 的值后, 找出其中最小正值赋给变量 e_0 , 其对应的子面即可被判定为该入射光线的第一个反射面。在为简明起见, 以二维形式画出的图 5 中, 光线 PP_0 的第一个入射面为 AB 面, $e_0 = e_{01} = (P_0\hat{P}_1)$, $P_1 = \hat{P}_1$ 点为光线与该面交点, 其坐标 (X_1, Y_1, Z_1) 可在(9)式中令 $n=1$ 并代入 e_0 求得。在 P_1 点反射后, 光线 P_1P_2 的方向余弦 (L_1, M_1, N_1) 用反射公式确定, 其一般形式为^[2]

$$L_n = L_{n-1} - 2\hat{i}_n \cos I_n, \quad M_n = M_{n-1} - 2\hat{j}_n \cos I_n, \quad N_n = N_{n-1} - 2\hat{k}_n \cos I_n, \quad (13)$$

式中 $(\hat{i}_n, \hat{j}_n, \hat{k}_n)$ 为用上法确定的当前反射子面的法线方向余弦, $\cos I_n$ 为入射角余弦, 可用下式计算

$$\cos I_n = \hat{i}_n L_{n-1} + \hat{j}_n M_{n-1} + \hat{k}_n N_{n-1}. \quad (14)$$

此后, 将(12)式中的下标 0 换为 1, 可用其求出直线 P_1P_2 与其余各子面的(延伸平面的) $e_{1m} = (P_1P_m)$ 值。对于屋脊面来说, 在 P_1 点反射后剩下的子面只有一个, e_{1m} 值是唯一的, 可直接作为 e_1 代入(9)式计算光线与第二子面交点 P_2 的坐标 (X_2, Y_2, Z_2) , 再由(13)式给出出射光线的方向余弦 $(L_2, M_2, N_2) = (L', M', N')$, 从而结束整个子程序的计算工作。而角镜的 e_{1m} 值仍有二个, 还需找出其中的最小正值以确定光线入射的第二个子面。

总之, (9), (10), (12), (13) 和(14)是对屋脊面或角镜进行光路计算的子程序所需的全部公式。其中(12)式应将下标 0 改为 n 以写成一般形式, 并配有适当的判断语句。这样, 可以把这些公式写成循环形式, 并令循环次数与反射子面的总数相等, 从而使子程序的结构十分紧凑简洁。

五、结 论

本文解决了对各种复杂棱镜(包括屋脊棱镜和角反射镜)进行实际光路追迹时可能遇到的各种问题。所涉及的计算公式已全部标准化,形式简单,通用性强。这些公式已被成功地应用于北京理工大学研制的用于非对称非常规复杂光学系统分析优化的 GOSA (General Optical System Analysis) 软件*,取得了令人满意的效果。

本文写作中北京理工大学袁旭沧教授曾提出若干有益的建议,特此致谢。

参 考 文 献

- [1] 袁旭沧:《应用光学》, (国防工业出版社,北京,1988), 107。
- [2] 王涌天;《光学技术》,1990, No. 5 (Sep), 2~8。

Ray-tracing formulae for complex prisms

WANG YONGTIAN

(*Beijing Institute of Technology, Department of Optical Engineering Beijing 100081*)

(Received 15 October 1990; revised 2 January 1991)

Abstract

In the design and analysis of optical systems folded by prisms, the conventional method of unfolding the prisms and treating them as glass slabs has its limitations. In many cases (such as in the tolerancing of prism angular errors), surface-by-surface finite ray-tracing is needed. Coordinate transfer formulae required in tracing rays through decentred and tilted surfaces are derived in a general and simple form. A new method is developed for ray-tracing through roof prisms and corner cube prisms which have special geometric structures.

Key words: geometrical optics, ray-tracing, prisms.