

# Talbot 效应的空间方法

鄂 国 铨

(北京工业大学应用物理系, 北京 100022)

## 提 要

对于照明光束方向与物光栅平面法线方向呈任意角度的情况作了研究。证明了 Talbot 像平面与物光栅平面平行。还给出了特殊情况下的 Talbot 像强度的分布。

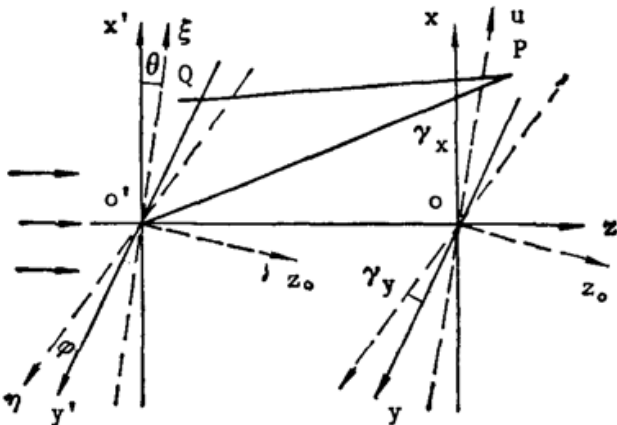
关键词: 菲涅耳衍射场, Talbot 效应, 频谱。

## 一、前 言

Patorski 以平行光束与光栅条纹垂直, 但与光栅平面的法线呈一定角度入射到光栅, 从实验上检测 Talbot 效应, 并作了初步分析和计算, 确定像平面的位置及方位角<sup>[1]</sup>; 本文将从普遍的三维情况出发, 即以相干平行光束从任意倾斜角度照明光栅, 对 Talbot 像平面的位置、空间方位, 以及特殊情况下的像面强度分布, 在理论上作全面系统的分析。

## 二、Talbot 成像区域的衍射场

与透镜成像不同, Talbot 成像过程是衍射直接成像, 其衍射场如图 1 所示, 选取相干平行



照明光束与基本坐标系的  $\overline{O'Oz}$  轴平行, 但与光栅平面  $O'\xi\eta$  的法线  $\overline{O'z_0}$  呈任意角度, 并取  $O'x'$  轴、 $Ox$  轴、 $O'\xi$  轴三者共面, 从而  $O'x'y'$  坐标平面与  $O'\xi\eta$  平面也不平行, 即  $\overline{O'\xi}$  轴与  $\overline{O'x'}$  轴呈  $\theta$  角,  $\overline{O'\eta}$  轴与  $\overline{O'y'}$  轴呈  $\varphi$  角。约定衍射光束的方向余弦  $l, m$  相对  $\overline{O'Oz}$  轴选取, 而不是相对  $\overline{O'z_0}$  选取, 如此, 照明光束的方向余弦恒为零。Q 点位于  $O'\xi\eta$  平面上, 即 Q 点是物光栅平面上的任意一点; 而 P 点位于  $Oxy$  坐标平面上,

Fig. 1 Fresnel-Kirchoff diffraction geometry 面上的任意一点; 而 P 点位于  $Oxy$  坐标平面上, 其复振幅记为  $U(P)$  又规定时谐因子为  $\exp(-i\omega t)$ 。

按文献 [5] 中频谱分析和线性系统理论应有

$$\left. \begin{aligned} U(P) = U(x, y, z) &= \iint_{-\infty}^{\infty} A_0(f_x, f_y) H(f_x, f_y) \exp[i2\pi(f_x x + f_y y)] df_x df_y, \\ A_0(f_x, f_y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, 0) \exp[-i2\pi(f_x \xi + f_y \eta)] d\xi d\eta, \\ H(f_x, f_y) &= \exp[i2\pi(z/\lambda) \sqrt{1 - (l^2 + m^2)}], \\ \lambda f_x &= l, \lambda f_y = m, \quad i = \sqrt{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中  $H(f_x, f_y)$  为传递函数,  $f_x, f_y$  为空间频率  $A_0(f_x, f_y)$  为衍射屏函数  $U(\xi, \eta, 0)$  的频谱。按文献[4]中菲涅耳-克希霍夫衍射积分来计算, 当  $\theta = \varphi = 0$  时, 已经给出了  $U(P)$  的解答; 当  $\theta \neq 0$  而  $\varphi = 0$  时, Patorski 针对夫琅和费衍射也已经作过分析<sup>[2, 3]</sup>; 那么当  $\theta \neq 0$  且  $\varphi \neq 0$  时, 参照上述思路, 针对图 1 的情况, 重新经过简单的但是比较烦琐的推导, 容易得出

$$\left. \begin{aligned} U(P) &\propto O \iint_S \exp[ikf(\xi, \eta)] d\xi d\eta, \\ f(\xi, \eta) &= -l\xi \cos \theta - m\eta \cos \varphi + (\xi \sin \theta + \eta \sin \varphi) [1 - \sqrt{1 - (l^2 + m^2)}] + H(l, m), \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中  $O$  可近似视为一个复常数,  $S$  为  $O'\xi\eta$  平面上衍射孔的面积, 而  $H(l, m)$  包含了  $l, m$  的全部高次项。若令

$$\left. \begin{aligned} l' &= l \cos \theta - \sin \theta \sqrt{1 - (l^2 + m^2)}, \\ m' &= m \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{1 - (l^2 + m^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

则有

$$f(\xi, \eta) = -l'\xi - m'\eta + H'(l', m'). \quad (4)$$

(2)、(4)式中的  $H$  及  $H'$  的具体表达式当然是不同的更是复杂的。但是(4)式与文献[4]中平行光垂直照明衍射屏情况的表达式相比, 至少在形式上是完全相同的, 因此, 可以认为(2)式描述了一个虚拟的平行光垂直照明衍射屏的物理状况, 相应的  $l', m'$  是虚拟的参数。确实, 当  $\theta = \varphi = 0$  时, 有  $l' = l$  和  $m' = m$ , 则(2)、(4)式显然就完全回到了文献[4]的表达式。

### 三、Talbot 像平面的确定及其特征

取物光栅平面  $O'\xi\eta$  上的刻纹分布满足

$$U(\xi, \eta, 0) = 1 + \cos(2\pi\xi/d), \quad (5)$$

当  $\theta = \varphi = 0$  时, 用(1)式容易推导出在光栅后存在三束衍射光束, 再注意到(3)式, 其相应的方向余弦为

$$\left. \begin{aligned} l' = l &= (n\lambda/d), \quad n = 0, \pm 1 \\ m' = m &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

当  $\theta \neq 0$  和  $\varphi \neq 0$  时, 容易从物理图像直观地判断出, 仍然还应当有三束衍射光束, 特别也将其相应的方向余弦分别记为  $(l_0, m_0)$ ,  $(l_{+1}, l_{-1})$ ,  $(m_{+1}, m_{-1})$ , 按本文第二节中的约定, 应有  $l_0 = m_0 = 0$ , 注意到(3)式后, 此时尤其有  $l'_\pm \neq l_{\pm 1}$  及  $m'_\pm \neq m_{\pm 1}$ ; 然而却很难由(1)、(3)式严格推导出  $l_{+1}, l_{-1}, m_{+1}, m_{-1}$  的具体表达式, 这个问题留到本文第四节去解决, 所以在本节内这四个参数实际上确是未知量。

但是按照(1)式的物理含义,确又不难推导出下式

$$U(P) = U(x, y, z) = \exp(ikz) + (1/2)\exp\{ik[xl_{+1} + ym_{+1} + z\sqrt{1 - (l_{+1}^2 + m_{+1}^2)}]\} \\ + (1/2)\exp\{ik[xl_{-1} + ym_{-1} + z\sqrt{1 - (l_{-1}^2 + m_{-1}^2)}]\}, \quad (7)$$

考虑到 Talbot 效应在相干光的技术应用中,多采用低频光栅,当  $\theta = \varphi = 0$  时有  $l \sim m \sim 10^{-2}$  当  $\theta \neq 0$ , 且  $\varphi \neq 0$  时,也容易判断  $l, m$  的量级至少不会变大,这点在本文第五节中将得到证实。因而(7)式可展成幂级数,只需保留到  $l^2, m^2$  项,可导出

$$I(P) = I(x, y, z) = UU^* \\ = (3/2) + (1/2)\cos k[x(l_{+1} - l_{-1}) + y(m_{+1} - m_{-1}) - (z/2)(l_{+1}^2 - l_{-1}^2 + m_{+1}^2 - m_{-1}^2)] \\ + 2\cos k[(x/2)(l_{+1} + l_{-1}) + (y/2)(m_{+1} + m_{-1}) - (z/4)(l_{+1}^2 + l_{-1}^2 + m_{+1}^2 + m_{-1}^2)] \\ \cdot \cos k[(x/2)(l_{+1} - l_{-1}) + (y/2)(m_{+1} - m_{-1}) - (z/4)(l_{+1}^2 - l_{-1}^2 + m_{+1}^2 - m_{-1}^2)]. \quad (8)$$

显然,(8)式第三项有重要意义,因其振幅为 2,它是两个因子的乘积,第二个因子就是  $Oxy$  平面上的强度分布,而第一个因子是对强度分布的调制。特别当下式成立时,将得到最大调制

$$\frac{x}{2}(l_{+1} + l_{-1}) + \frac{y}{2}(m_{+1} + m_{-1}) - \frac{z}{4}(l_{+1}^2 + l_{-1}^2 + m_{+1}^2 + m_{-1}^2) = \frac{N}{2}\lambda, \quad (9)$$

式中  $N = 1, 2, 3, \dots$ 。在取定  $\lambda, N, z$  之后,再假定  $l_{+1}, l_{-1}, m_{+1}, m_{-1}$  为已知,则(9)式化为  $Ax + By + C = 0$ , 其中  $A, B, C$  为常数。它表明在  $Oxy$  平面上,只有沿着上式这条直线上的点,强度分布才受到最大调制,否则不然。故称  $Oxy$  平面为非均匀调制平面,它不是理想成像平面。

由(9)式可以导出以下两式

$$\left. \begin{array}{l} \text{若 } x = \frac{N\lambda}{l_{+1} + l_{-1}} \quad \text{则 } \operatorname{tg} \gamma_v = \frac{z}{y} = \frac{2(m_{+1} + m_{-1})}{(l_{+1}^2 + l_{-1}^2 + m_{+1}^2 + m_{-1}^2)}, \\ \text{若 } y = \frac{N\lambda}{m_{+1} + m_{-1}} \quad \text{则 } \operatorname{tg} \gamma_a = \frac{z}{x} = \frac{2(l_{+1} + l_{-1})}{(l_{+1}^2 + l_{-1}^2 + m_{+1}^2 + m_{-1}^2)}, \end{array} \right\} \quad (10)$$

上式的物理意义是:如果在  $Oxy$  平面的原点处,另外再建立一个平面  $Ouv$ ,使  $Ou$  轴与  $Ox$  轴同位于  $Oxy$  平面上但呈  $\gamma_a$  夹角,然后再旋转  $Ou$  轴,使  $Ov$  轴与  $Oy$  轴  $\gamma_v$  夹角,自然  $Ouv$  平面的法线  $\overline{Oz_0}$  与  $\overline{Oz}$  轴也不平行,如图 1 所示;那么显然  $Ouv$  平面上任意一点的强度,都必将受到最大调制,故称  $Ouv$  平面为均匀调制平面,并且确认它就是本文所研究的 Talbot 效应的成像平面

如果将(9)式等号的右方取定为  $N\lambda$ ,然后再将  $x=0$  和  $y=0$  同时代入(9)式,又可导出

$$z = z_N = \frac{4N\lambda}{l_{+1}^2 + l_{-1}^2 + m_{+1}^2 + m_{-1}^2}, \quad (11)$$

$$\Delta z = \frac{4\lambda}{l_{+1}^2 + l_{-1}^2 + m_{+1}^2 + m_{-1}^2}. \quad (12)$$

以上两式说明:在光栅后沿  $\overline{Oz}$  轴,即沿相干平行光束照明的传播方向,按(11)式取一系列的点  $z_N$  作为原点,再按照(10)式所给出的  $\gamma_a$  和  $\gamma_v$ ,就可以确定出一系列互相平行的 Talbot 像平面,而其相邻间隔可按(12)式计算得出。

#### 四、 $l_{+1}, l_{-1}, m_{+1}, m_{-1}$ 的求解

将(4)式代入(2)式中的  $U(P)$  表达式,再设想将  $Oxy$  平面移至无穷远处,即取极限情

况,按文献[4]此时应有,  $H(l, m) \rightarrow 0$  及  $H'(l', m') \rightarrow 0$ , 从物理模型上讲, 相当于由菲涅耳衍射区过渡到了夫琅夫费衍射区; 这样, 在其成像平面上, 当  $\theta = \varphi = 0$  时, 可以证明只存在三个主极大, 亦即

$$\begin{aligned} l' = l = (n\lambda/d), \quad n = 0, \pm 1 \\ m' = m = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

很明显上式与(6)式完全相同; 当  $\theta \neq 0$  和  $\varphi \neq 0$  时, 按(3)式的物理含义, 显然应当有下式

$$\left. \begin{aligned} l' = n\lambda/d, \\ m' = 0, \quad n = 0, \pm 1 \\ l' \neq l, \quad m' \neq m. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

也就是说, (6)、(13)两式是针对真实的垂直照明光栅的情况而言的, 而(14)式是针对虚拟的垂直照明光栅的情况; 更应强调指出, (6)式是在菲涅耳衍射区用频率域的观点导出的, 而(13)、(14)两式是在夫琅和费衍射区用空间域的观点导出的。但是物理对像确是完全相同的三束衍射光束。自然, 对虚拟情况(14)式, 可进一步按如下步骤处理, 即将(3)式代入(14)式后有

$$\left. \begin{aligned} l_n \cos \theta - \sin \theta [1 - \sqrt{1 - (l_n^2 + m_n^2)}] &= (n\lambda/d), \\ m_n \cos \varphi - \sin \varphi [1 - \sqrt{1 - (l_n^2 + m_n^2)}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

由上式可解出

$$\left. \begin{aligned} l_n &= \frac{n\lambda}{d \cos \theta} + \frac{\sin \theta \cos \varphi}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} [f_1(\theta, \varphi, \lambda, n, d) - \sqrt{f_2(\theta, \varphi, \lambda, n, d)}], \\ m_n &= \frac{\cos \theta \sin \varphi}{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} [f_1(\theta, \varphi, \lambda, n, d) - \sqrt{f_2(\theta, \varphi, \lambda, n, d)}], \\ f_1(\theta, \varphi, \lambda, n, d) &= \cos \theta \cos \varphi - (n\lambda \sin \theta \cos \varphi / d \cos \theta), \\ f_2(\theta, \varphi, \lambda, n, d) &= \cos^2 \theta \cos^2 \varphi - (2n\lambda/d) \sin \theta \cos^2 \varphi - (n\lambda/d)^2. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

于是在(16)式中取定  $n = \pm 1$ , 对于给定的  $\theta$ 、 $\varphi$ 、 $\lambda$ 、 $d$ , 则最终可求得  $l_{+1}$ 、 $l_{-1}$ 、 $m_{+1}$ 、 $m_{-1}$  的确切数值。

## 五、分析和讨论

(1) 取  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ , 并分别取光栅频率为  $f_g = 25 \text{ mm}^{-1}$  及  $f_g = 40 \text{ mm}^{-1}$ , 再对  $\theta$  和  $\varphi$  分别取不同的角度。先用(16)式算出  $l_{+1}$ 、 $l_{-1}$ 、 $m_{+1}$ 、 $m_{-1}$  的数值, 再代入(10)式, 可求出  $\gamma_e$  和  $\gamma_v$ , 列于表1。显然,  $\gamma_e$  和  $\gamma_v$  分别与  $\theta$  和  $\varphi$  吻合得相当好, 它表明: 一系列等间隔的 Talbot 像平面  $Ouv$  与物光栅平面  $O'\xi\eta$  是相互平行的, 自然  $Ouv$  平面与  $O'\xi\eta$  平面上的条纹走向也是互相平行的, 同时也证实了第三节中有关  $l_{+1}$ 、 $l_{-1}$ 、 $m_{+1}$ 、 $m_{-1}$  取值数量级的判断。另外, 由(11)、(12)两式可知,  $z_N$  和  $\Delta z$  的取值也与照明光束和光栅平面之间的倾斜状况有关。

(2) 取实用中最常见的特殊情况, 即当  $\theta \neq 0$  而  $\varphi = 0$  时, 画出  $O'x'z$  平面图, 如图2所示, 其中  $O'x'$ 、 $O'\xi$ 、 $O'z$ 、 $O'z_0$  均位于同一平面上。

按本文第二节的约定, 方向余弦是相对  $\overline{O'z}$  轴选取, 故一般地应有

$$l_n = \sin \Delta \theta_n = \sin(\theta_n - \theta), \quad (n = \pm 1) \quad (17)$$

Table 1 Angles  $\gamma_x$  and  $\gamma_y$  with relation to diffraction orders in respect of angles  $\theta$  and  $\varphi$  $\lambda=0.6328 \mu\text{m}$ 

$f_g=25/\text{mm}$			$f_g=40/\text{mm}$				
$\theta$	$30^\circ$	$60^\circ$	$0^\circ$	$\theta$	$15^\circ$	$45^\circ$	$0^\circ$
$\varphi$	$60^\circ$	$30^\circ$	$0^\circ$	$\varphi$	$45^\circ$	$15^\circ$	$0^\circ$
$l_{+1}$	0.018376	0.032579	0.01332	$l_{+1}$	0.026301	0.036466	0.02531
$l_{-1}$	-0.018183	-0.030836	-0.01332	$l_{-1}$	-0.026117	-0.035182	-0.02531
$m_{+1}$	0.000292	0.000306	0	$m_{+1}$	0.000346	0.001782	0
$m_{-1}$	0.000286	0.000275	0	$m_{-1}$	0.000341	0.001695	0
$\gamma_x$	$30.002^\circ$	$60.006^\circ$	$0^\circ$	$\gamma_x$	$15.002^\circ$	$45^\circ$	$0^\circ$
$\gamma_y$	$60.001^\circ$	$30.006^\circ$	$0^\circ$	$\gamma_y$	$44.99^\circ$	$15.004^\circ$	$0^\circ$

但是, 相对光栅平面的法线  $O'z_0$  而言, 同一条光束的方向余弦, 又一般地应为

$$L_n = \sin \theta_n \quad (n = \pm 1) \quad (18)$$

此外, 将  $\theta \neq 0$  和  $\varphi = 0$  的条件代入 (16) 式后, 立刻导出

$$l_n = \cos \theta [\sin \theta + (n\lambda/d)] - \sin \theta \sqrt{1 - [\sin \theta + (n\lambda/d)]^2} \quad (19)$$

若将 (17) 式展开, 并将 (18) 式代入后, 再与 (19) 式相比较, 又立刻得到

$$L_n = \sin \theta_n = \sin \theta + (n\lambda/d) \quad (20)$$

(20) 式就是众所周知的文献 [4] 中的光栅方程。特别, 当  $\theta = \varphi = 0$  时, 由 (19)、(20)、(16) 三式均可得到

$$L_n = l_n = (n\lambda/d), \quad (n = \pm 1) \quad (21)$$

$$m_n = 0.$$

这样, 就直观地揭示出了烦琐的 (16) 式的物理内涵, 也证实了上述全部推导和计算的正确性。

(3) 为了求出均匀调制平面, 即  $Ouv$  平面上的强度分布, 只需由 (8) 式出发, 取其中第三项第一个因子恰等于 1, 并将  $(x, y)$  坐标用  $(u, v)$  坐标代替, 同时将  $l_n$  用  $L_n$  代替, 经整理后可导出在  $\theta \neq 0$  而  $\varphi = 0$  条件下

$$I = I(u, v, z_N) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\pi \left\{ \frac{2u}{d} - \frac{4N\lambda \sin \theta}{d[\sin^2 \theta + (\lambda/d)^2]} \right\} + 2 \cos 2\pi \left\{ \frac{u}{d} - \frac{2N\lambda \sin \theta}{d[\sin^2 \theta + (\lambda/d)^2]} \right\} \quad (22)$$

显然有重要意义的第三项是基频项, 其周期与物光栅本身的周期相同皆为  $d$ , 它就是光栅自身的像, 而第二项是二次谐波项, 其振幅只是基频项的  $1/4$  而已。

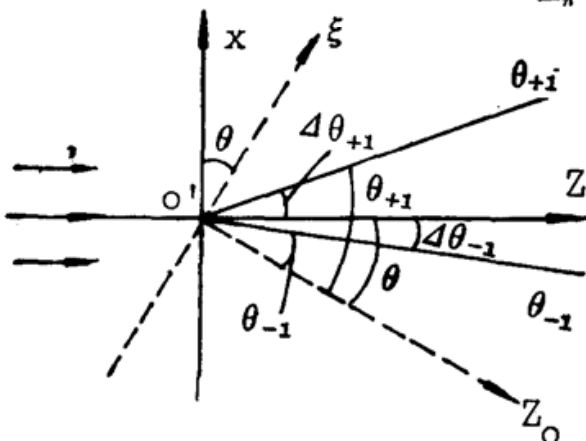


Fig. 2 Illustrating the direction of diffraction beams in two-dimensional case

## 六、结 论

(1) 本文所讨论的物理背景情况,较文献[1]更复杂多样化,且内容更丰富。可以说,文献[1]所讨论的具体问题仅是本文的特例。事实上,将本文的(10)式取 $\theta \neq 0$ 和 $\varphi = 0$ 以及将本文的(16)式取 $\theta = 0$ 和 $\varphi \neq 0$ ,就分别得到文献[1]中的(18)、(19)两式;另外本文的(10)、(11)、(12)、(16)式都可直接应用于实验和技术工作,特别是(10)、(16)两式更是文献中从来没有报道过的。

(2) 本文从菲涅耳-克希霍夫衍射积分出发,引进虚拟的垂直照明光栅的物理图像,以及相应的虚拟参数 $l'$ 、 $m'$ ,通过夫琅和费衍射求出衍射光束的方向余弦,再使用频谱的概念确定出菲涅耳衍射区中 Talbot 像平面的位置和方位及强度分布,进而分析其特征,又取定相干平行照明光束为基本坐标系的 $\overline{O'Oz}$ 轴;从而使得本文能够严格地综合概括了任意倾斜照明下的 Talbot 效应,作了全面系统的三维分析;因此从理论分析的方法上讲,本文与文献[1]是大不相同的,具有更普遍的意义。

### 参 考 文 献

- [1] K. Patorski; *Optik*, 1984, **69**, No. 1 (Dec), 30~36.
- [2] K. Patorski; *Optica Acta*, 1983, **30**, No. 5(May), 673~679.
- [3] K. Patorski; *Optica Acta*, 1984, **31**, No. 2 (Feb), 1470.
- [4] M. Born and E. Wolf; *«Principles of Optics»*, (Pergamon Press, Oxford, 1980), 375~405.
- [5] J. W. Goodman; *«Introduction to Fourier Optics»*, (McGraw-Hill, San Francisco, 1968), 48~54.

## The space-method for Talbot effect

E GUO GUANG

(Peking Polytechnical University Beijing 100022)

(Received 7 September 1990; revised 2 January 1991)

### Abstract

General case of the tilt of grating normal in an arbitrary direction with respect to the illumination direction has been investigated. It has been verified that the Talbot imaginary planes are parallel to the grating plane. The calculation model of intensity distribution for Talbot image pertinent to special case is presented.

**Key words:** Talbot effect, diffraction field, frequency spectrum.