

多量子阱波导等效折射率的新公式

曹 庄 琪

(上海交通大学应用物理系, 上海 200030)

提 要

利用转移矩阵技术, 建立了薄膜近似下的多量子阱波导芯子区域等效折射率的解析公式。该公式是偏振态和量子阱波导折射率分布的函数。

关键词: 多量子阱波导, 等效折射率。

一、引 言

电子多量子阱结构中异乎寻常的三阶非线性极化系数的增强效应^[1], 为实现低功率、高速和室温工作的光开关和信号处理提供了实际可能性。因此, 近年来对多量子阱结构的研究引起了日益广泛的重视。电磁波在无限扩展的周期性多层薄膜中传输的问题, 是由 Rytov^[2] 在 30 年前开始的。他建立了适用于 TE 和 TM 两种偏振态的这种无限结构的等效介电系数和色散关系。而对多量子阱波导(有限周期性结构)传输性质的理论研究则是由 Ohke^[3] 等人开始的。他们用量子阱区和垒区折射率平方的加权平均来代替多量子阱波导芯子部分的交变折射率, 并把这种方法称为均方根近似。在量子阱和垒的周期数 $N \gg 1$ 的情况下, 这种近似对 TE 模是十分有效的, 但不适合于 TM 模。Skinner^[4] 等人利用均方根近似的结果和整个多量子阱区域转移矩阵在 $N \gg 1$ 时的趋近形式, 导出了多量子阱波导的近似色散方程。但他们没有给出多量子阱波导芯子区域关于 TM 模的等效折射率公式, 而且得到的色散方程是不自洽的。论文^[2~4] 处理的都是简单的阶跃折射率分布的多量子阱结构, 在实际应用中, 有时会遇到三角形、双曲形或其它折射率分布的多量子阱结构。为解决此类问题, 本文利用转移矩阵技术, 并采用处理晶格周期势中电子态的 Floquet 理论, 首次导出了薄膜近似下的任意折射率分布多量子阱波导芯子区域的等效折射率公式。该公式适用于 TE 和 TM 两种偏振状态, 并能清楚地解释多量子阱波导的本征双折射行为。利用该公式, 可直接得到自洽的多量子阱波导的色散方程, 进而可分析多量子阱波导的模式传输性质。

二、解 析 结 果

考虑图 1 所示的任意折射率分布的多量子阱波导, 光沿 z 方向传输。设量子阱-垒的周期为 A , 多量子阱区域的厚度为 w , 包括 N 个整周期数。图中 n_0 和 n_3 分别为衬底和覆盖层的折射率, 而 n_1 和 n_2 分别为多量子阱波导芯子区域折射率分布的极大值和极小值。一

般情况下,假定有

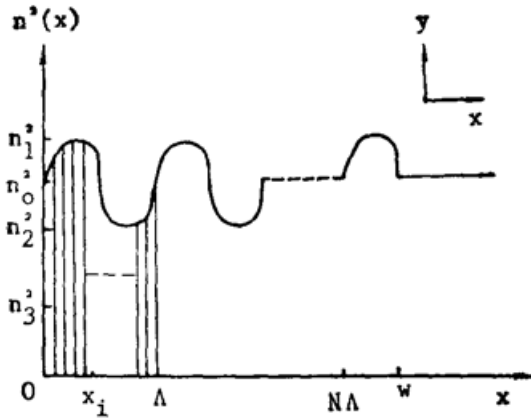


Fig. 1 The refractive index profile of the MQW waveguide

$$n_1 > n_0 > n_2 > n_3$$

根据 Floquet 定理,在多量子阱波导中传输的横向 (x 向)传播常数 K 满足以下条件

$$\cos K\Lambda = \frac{1}{2} \text{Tr} M(\Lambda), \quad (1)$$

式中 $M(\Lambda)$ 是量子阱-垒周期的转移矩阵,“Tr”表示矩阵的迹。而横向传播常数 K 由下式定义

$$K = (k^2 n_e^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad (2)$$

式中 β 是光导波沿传输方向 (z 向)的传播常数,

$$k = 2\pi/\lambda$$

为自由空间的波数, λ 为光波长,而 n_e 即为多量子阱波导芯子区域的等效折射率。

为求一个量子阱-垒周期的转移矩阵,可以把周期长度 Λ 分别 l 等分,每一微分区域的厚度为 a ,则 $x_i = ia = \Lambda$ 。根据转移矩阵理论,一般地,第 i 个微分区域的转移矩阵可写为^[1]

$$M_i = \begin{bmatrix} \cos \alpha_i a & \frac{f_i}{\alpha_i} \sin \alpha_i a \\ -\frac{\alpha_i}{f_i} \sin \alpha_i a & \cos \alpha_i a \end{bmatrix}, \quad (i=1, 2, \dots, l) \quad (3)$$

$$f_i = \begin{cases} 1 & \text{TE 模} \\ n^2(x_i) & \text{TM 模} \end{cases} \quad (4)$$

$$\alpha_i = [k^2 n^2(x_i) - \beta^2]^{1/2}. \quad (5)$$

对于 $\beta > kn(x_i)$ 的区域,只要利用三角函数与双曲三角函数之间的转换关系,(3)式仍然成立。由(5)式容易看出, α_i 的大小是光波长倒数的数量级,而量子阱-垒周期的长度 Λ 在薄膜近似下 ($N \gg 1$) 约为 100\AA 的数量级,又在 $l \rightarrow \infty$ 或 $a \rightarrow 0$ 的条件下,必有 $\alpha_i a \ll 1$,因此可把三角函数展开成幂级数,若取二级近似,则(3)式可写成

$$\begin{aligned} M_i &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}(\alpha_i a)^2 & f_i a \\ -\frac{\alpha_i^2}{f_i} a & 1 - \frac{1}{2}(\alpha_i a)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + f_i a \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\alpha_i^2}{f_i} a \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}(\alpha_i a)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

(6)式第二个等号右边第一项为主项,第二、三两项是一阶小量,而第四项为二阶小量。为方便计,记

$$M_i = E + f_i a A - \frac{\alpha_i^2}{f_i} a B - \frac{1}{2}(\alpha_i a)^2 E, \quad (7)$$

式中 E 为单位矩阵,而 A 、 B 均为仅有一个单位矩阵元的简单矩阵。

一个周期的转移矩阵是 l 个 M_i 矩阵依次相乘的积

$$M(\Lambda) = M_l M_{l-1} M_{l-2} \cdots M_3 M_2 M_1. \quad (8)$$

已知两矩阵 M 、 N 相加和相乘满足以下求迹公式

$$\text{Tr}(M+N) = \text{Tr} M + \text{Tr} N, \quad (9)$$

$$\text{Tr}(MN) = \text{Tr}(NM). \quad (10)$$

利用(9)、(10)两式,并忽略三阶以上小量,一个周期转移矩阵的迹由(8)式可得

$$\begin{aligned} \text{Tr} M(\Delta) = & \text{Tr} E^l + \sum_i f_i a \text{Tr}(E^{l-1}A) \\ & - \sum_i \frac{\alpha_i^2}{f_i} a \text{Tr}(E^{l-1}B) - \frac{1}{2} \sum_i (\alpha_i a)^2 \text{Tr} E^l \\ & + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (f_i a)(f_j a) \text{Tr}(AE^{j-i-1}AE^{l-j+i-1}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \left(\frac{\alpha_i^2}{f_i} a\right) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} a\right) \text{Tr}(BE^{j-i-1}BE^{l-j+i-1}) \\ & - \sum_i \sum_j (f_i a) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} a\right) \text{Tr}(AE^{j-i-1}BE^{l-j+i-1}). \end{aligned} \quad (11)$$

(11)式右边第一项是 l 个 M_i 矩阵中第一项相乘并求迹所得结果;第二、三、四项分别是 $l-1$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的一个 M_i 矩阵中第二、三、四项相乘并对 i 求和再求迹所得;第五、六两项分别为 $l-2$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第二、三两项相乘并对 i, j 求和再求迹之结果;第七项是 $l-2$ 个 M_i 矩阵中的第一项与剩下的两个 M_i 矩阵中的第二和第三两项相乘并对 i, j 求和再求迹的形式;第五、六两项前的系数 $1/2$ 是由重复求和所引起。

下面对(11)式右边的每一项进行分析计算,根据 E, A, B 三个特殊矩阵的性质,容易看出

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}(E^{l-1}A) &= \text{Tr} A = 0, \\ \text{Tr}(E^{l-1}B) &= \text{Tr} B = 0, \\ \text{Tr}(AE^{j-i-1}AE^{l-j+i-1}) &= \text{Tr} A^2 = 0, \\ \text{Tr}(BE^{j-i-1}BE^{l-j+i-1}) &= \text{Tr} B^2 = 0, \\ \text{Tr} E^l &= \text{Tr} E = 2, \\ \text{Tr}(AE^{j-i-1}BE^{l-j+i-1}) &= \text{Tr}(AB) = 1, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

又因为当 $a \rightarrow 0$ 时,有

$$\sum_i (\alpha_i a)^2 = a \sum_i \alpha_i^2 a = a \int_0^A \alpha^2 dx \rightarrow 0 \quad (13)$$

故由(11)式可得

$$\text{Tr} M(\Delta) = 2 - \sum_i \sum_j (f_i a) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} a\right). \quad (14)$$

在 $N \gg 1$ 条件下,一般有

$$\cos K\Delta = 1 - \frac{1}{2}(K\Delta)^2. \quad (15)$$

利用(1)、(2)和(15)式,(14)式变为

$$(k^2 n_0^2 - \beta^2) \Delta^2 = \sum_i \sum_j (f_i a) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} a\right). \quad (16)$$

对 TE 模,在 $a \rightarrow 0$ 条件下,并利用(4)、(5)两式,可以得到

$$\sum_i \sum_j (f_i a) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} a\right) = \Delta \int_0^A [k^2 n^2(x) - \beta^2] dx = k^2 \Delta \int_0^A n^2(x) dx - \beta^2 \Delta^2. \quad (17)$$

从而由(16)式得到

$$(n_e^{\text{TE}})^2 = \frac{1}{A} \int_0^A n^2(x) dx. \quad (18)$$

对 TM 模, 同样在 $a \rightarrow 0$ 条件下, 并利用(4)、(5)两式, 可得

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j (f_i a) \left(\frac{\alpha_j^2}{f_j} a \right) &= \int_0^A n^2(x) dx \cdot \int_0^A \frac{k^2 n^2(x) - \beta^2}{n^2(x)} dx \\ &= k^2 A \int_0^A n^2(x) dx - \beta^2 \int_0^A n^2(x) dx \cdot \int_0^A \frac{1}{n^2(x)} dx. \end{aligned} \quad (19)$$

从而由(16)式可得

$$(n_e^{\text{TM}})^2 = \frac{1}{A} \int_0^A n^2(x) dx - \left[\frac{1}{A^2} \int_0^A n^2(x) dx \cdot \int_0^A \frac{1}{n^2(x)} dx - 1 \right] \beta^2 / k^2. \quad (20)$$

(18)式和(20)式即为多量子阱波导芯子区域等效折射率的解析公式。

三、讨 论

根据上节的分析, 可得到以下四点结论:

(1) 由公式(18)可知, n_e^{TE} 与传播常数 β 无关, 这表明该公式也适用于无限扩展的多量子阱结构。而(20)式中的 n_e^{TM} 却随 β 而变, 这表明 n_e^{TM} 与波导参数有关。当多量子阱区域的厚度 $w \rightarrow \infty$ 时, β/k 趋于 n_e^{TM} 的极限值 $(n_e^{\text{TM}})_\infty$, 由(20)式可得

$$(n_e^{\text{TM}})^2 = \frac{A}{\int_0^A \frac{1}{n^2(x)} dx}. \quad (21)$$

对于简单的阶跃折射率分布

$$n^2(x) = \begin{cases} n_1^2 & 0 \leq x < d_1 \\ n_2^2 & d_1 \leq x < d_1 + d_2 = A \end{cases} \quad (22)$$

由(18)和(21)式, 可得

$$(n_e^{\text{TE}})^2 = \frac{n_1^2 d_1 + n_2^2 d_2}{d_1 + d_2}, \quad (23)$$

$$(n_e^{\text{TM}})^2 = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{n_1^2} + \frac{d_2}{n_2^2}}. \quad (24)$$

(23)和(24)两式与 Rytov^[2]得到的结果完全一致。这表明 Rytov 所得公式是(18)、(20)两式在特殊情况下的解。

(2) 当(20)式右边 β^2/k^2 前面的因子不为零时, 容易看出:

$$n_e^{\text{TE}} \neq n_e^{\text{TM}}, \quad (25)$$

这是一个完全不同于简单三层平板波导的结论。显然, 这个不等式是多量子阱结构具有双折射性质的起因。

(3) 薄膜近似下的多量子阱波导的色散方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{K}{f_e} \left(\frac{p}{f_0} + \frac{q}{f_3} \right) &= \left(\frac{K^2}{f_e^2} - \frac{pq}{f_0 f_3} \right) \tan Kw \\ p &= (\beta^2 - k^2 n_0^2)^{1/2} \\ q &= (\beta^2 - k^2 n_3^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

p 、 q 分别为衬底和覆盖层的场的衰减系数。对 TE 模, $f_e=1$; 对 TM 模, $f_e=(n_e^{\text{TM}})^2$ 。(26) 与简单三层平板波导的色散方程完全一致。(26) 式中的 Kw 与文献[4]中参量 Ω 的定义相同, 故对 TE 模, (26) 式与文献[4]中的(17)式相同。但对 TM 模, 两者有质的差别: 在(26) 式中, 取 $f_e=(n_e^{\text{TM}})^2$, 而在文献[4]中, 错误地取 $f_e=(n_e^{\text{TE}})^2$, 造成色散方程的不自洽, 原因在于文献[4]没有区分 n_e^{TE} 和 n_e^{TM} 的差别。

(4) 若使多量子阱波导衬底折射率 n_0 满足关系

$$n_e^{\text{TM}} < n_0 < n_e^{\text{TE}}, \quad (27)$$

则该波导成为一个只能传输 TE 模的单偏振波导。(27) 式为设计一种新的波导偏振器提供了有效的理论指导。

参 考 文 献

- [1] Y. C. Chang; *J. Appl. Phys.*, 1985, **58**, No. 1 (1 Jul), 499~509.
- [2] J. P. Van der Ziel, A. C. Gassard; *J. Appl. Phys.*, 1978, **49**, No. 5 (May), 2919~2921.
- [3] S. Ohke, T. Umeda *et al.*; *Opt. Commun.*, 1985, **50**, No. 4 (15 Dec), 23~23.
- [4] I. M. Skinner, R. Shail *et al.*; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1989, **QE-25**, No. 1 (Jan), 6~11.
- [5] P. F. Yuh, K. L. Wang; *Phys. Rev. (B)*, 1988, **38**, No. 18 (15 Dec), 13307~13315.
- [6] M. O. Vassell, J. Lee *et al.*; *J. Appl. Phys.*, 1983, **54**, No. 9 (Sep), 5206~5213.

New formula of equivalent refractive index in MQW waveguides

CAO ZHUANGQI

(Department of Applied Physics, Shanghai Jiaotong University Shanghai 200030)

(Received 13, November 1990)

Abstract

A new formula of equivalent refractive index in the core-section of the multi quantum wells (MQW) waveguide is developed for the two polarizations in the thin film approximation. It can be applied to an arbitrary refractive index profile of the MQW waveguide.

Key words: MQW waveguides, equivalent refractive index.