第11卷 第6期
1991年6月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 11, No. 6
June, 1991

光学系统的等效变换

吕百达
(四川大学物理系，成都 610064)

季小铃
(重庆师范学院物理系，重庆 630000)

提 要

本文在普遍情况下使用矩阵方法详细讨论了光学系统的等效变换，证明光线变换矩阵为$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的光学系统当$C\neq 0$时可等效为一个薄透镜，当$C=0$时等效为一个薄透镜组。文中所得结果能用于分析光线或光束通过复杂光学系统的变换和多元件光腔的问题。

关键词：等效变换，矩阵光学，光学系统的合成。

一、引 言

在激光光学中经常遇到两类问题：(1) 研究几何光线或激光束通过光线变换矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的光学系统的传输变换，这可用熟知的$ABCD$定律来描述[1]，已有大量文献对此作了深入的讨论。(2) 光学系统的合成。即根据所要求的变换矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$来设计一个光学系统，确定组成这一光学系统所需元件的数目、类型，几何参数和组合顺序。与这两类问题都有密切联系的是光学系统的等效变换。例如，当研究光线或激光束通过一个复杂光学系统的行为或者分析多元件光腔的模式特征时，为了简化问题，常需作一些等效变换，将复杂光学系统简化为一个薄透镜或透镜组，将复杂多元件腔等效为简单两镜腔等等。这类问题的一般提法是：光线变换矩阵为$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$(为清楚起见，本文限定$A$、$B$、$C$、$D$为实元素)的光学系统存在何种简单的等效变换？本文拟使用矩阵方法对此进行较为普遍的分析和讨论。

二、光学系统的等效变换

设有一光线变换矩阵

$$M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

的光学系统，物、像空间折射率分别为n_1、n_2如图1所示，则

$$\det M=AD-BC=\frac{n_1}{n_2}>0。\tag{1}$$

收稿日期：1990年9月12日；收到修改稿日期：1990年12月4日

由光学系统合成的理论知[2], 任一非简并光线变换矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$可用不超过四个基本矩阵

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \det\alpha = 1, \\ \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}, \ \det\beta = 1, \\ \gamma &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \ \det\gamma = \gamma, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

的有序乘积来表示, 合成方式分为二大类八种情况。

1. 第一类为两个 α 矩阵与 β、γ 矩阵的乘积

$$(1)\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (A-1)/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & AD-BC \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & B+[(1-A)D/C] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = B + [(1-A)D/C], \ \alpha_2 = (A-1)/C, \\ &\beta = C, \ \gamma = AD - BC = (n_1/n_2)。 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

令

$$\alpha_1 = h_1, \ \alpha_2 = h_2, \ C = -1/f, \tag{5}$$

(3)式化为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & n_1/n_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。 \tag{6}$$

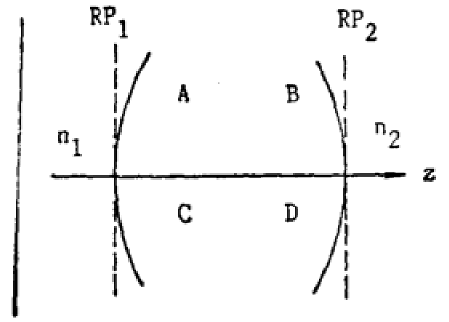

Fig. 1 An optical system with ray fransfer matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$

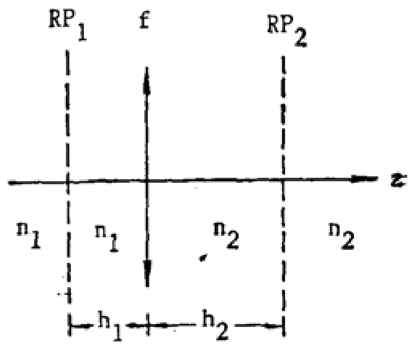

Fig. 2 Equivalent thick lens transformation (h_1, h_2, f) of an optical system ($n_1 \to n_2$)

注意到矩阵元的物理意义后[3], (6)式的意义是十分清楚的。它表示变换矩阵为$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的光学系统可以等效为如图 2 所示的主距为 h_1、h_2、像方焦距为 f 的浸液厚透镜, 其物、像空间折射率分别为 n_1、n_2。设厚透镜入射和出射球面曲率半径分别为 R_1、R_2, 厚度 l、折射率 n, 使用矩阵光学方法[3], 求得

$$\left.\begin{aligned}&h_1=\frac{n_1(n_2-n)l}{n_2nR_2C},\ h_2=\frac{(n-n_1)l}{nR_1C},\\&\frac{1}{f}=-C=-\frac{1}{R_1R_2n}\left[(n_2-n)R_1+(n-n_1)R_2+\frac{(n_2-n)(n-n_1)l}{n}\right],\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

可以证明，对第一类其余三种情况形式上都能够化为(6)式的结果，现推证如下

(2)
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&0\\0&AD-BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&(A-1)(AD-BC)/C\\0&1\end{pmatrix}\\&\times\begin{pmatrix}1&0\\C/(AD-BC)&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&B+[(1-A)D/C]\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha_2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\beta&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha_1\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&\alpha_2'\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\beta'&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha_1\\0&1\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=B+[(1-A)D/C],\ \alpha_2=(A-1)(AD-BC)/C,\\&\beta=C/(AD-BC),\ \gamma=AD-BC,\\&\alpha_2'=(\alpha_2/\gamma),\ \beta'=\beta\gamma。\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

注意，(8)式中由第二等式到第三等式时利用了矩阵的准对易关系[2]。

(3)
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&(A-1)/C\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&AD-BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\C/(AD-BC)&1\end{pmatrix}\\&\times\begin{pmatrix}1&B+[(1-A)D/C]\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&\alpha_2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\beta'&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha_1\\0&1\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=B+[(1-A)D/C],\ \alpha_2=(A-1)/C,\\&\beta=C/(AD-BC),\ \gamma=AD-BC,\ \beta'=\beta\gamma。\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

(4)
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&(A-1)/C\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\C&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&[B+(1-A)D/C]/(AD-BC)\\0&1\end{pmatrix}\\&\times\begin{pmatrix}1&0\\0&AD-BC\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&\alpha_2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\beta&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha_1''\\0&1\end{pmatrix},\end{aligned}\tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=[B+(1-A)D/C]/(AD-BC),\ \alpha_2=(A-1)/C,\\&\beta=C,\ \gamma=AD-BC,\ \alpha_1''=\alpha_1\gamma。\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

2. 第二类为两个 β 矩阵与 α、γ 矩阵之积

(1)
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1&0\\C+[(1-A)D/B]&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&AD-BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&B\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\(A-1)/B&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\\beta_2&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\alpha\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\\beta_1&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/f_2 & n_1/n_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1/f_1 & 1\end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=B,\ \beta_1=(A-1)/B=-1/f_1,\\ &\beta_2=C+[(1-A)D/B]=-1/f_2,\ \gamma=AD-BC=n_1/n_2。\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

(14)式表明，变换矩阵为$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$的光学系统也可以等效为如图3所示相距为$\alpha$、焦距分别为$f_1$、$f_2$的浸液薄透镜组，薄透镜$f_1$浸在折射率为$n_1$介质之中，薄透镜$f_2$两侧介质折射率分别为$n_1$、$n_2$。

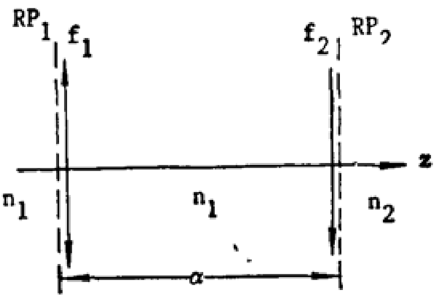

Fig. 3 Equivalent two thin lens combination (f_1, f_2, α) of an optical system

容易证明，第二类其余三种情况均可化为这一结果，即

(2) $$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & AD-BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ [C+(1-A)D/B]/(AD-BC) & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & B\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ (A-1)/B & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_2' & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=B,\ \beta_1=(A-1)/B,\ \beta_2=[C+(1-A)D/B]/(AD-BC),\\ &\gamma=AD-BC,\ \beta_2'=\beta_2\gamma。\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

(3) $$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ C+[(1-A)D/B] & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & B/(AD-BC)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & AD-BC\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ (A-1)/B & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha''\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=B/(AD-BC),\ \beta_1=(A-1)/B,\\ &\beta_2=C+(1-A)D/B,\ \gamma=AD-BC,\ \alpha''=\alpha\gamma。\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

(4) $$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ C+(1-A)D/B & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & B/(AD-BC)\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0\\ (A-1)(AD-BC)/B & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & AD-BC\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha''\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_1'' & 1\end{pmatrix}, \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha=B/(AD-BC),\ \beta_1=(A-1)(AD-BC)/B,\\ &\beta_2=C+(1-A)D/B,\ \gamma=AD-BC,\\ &\alpha''=\alpha\gamma,\ \beta_1''=\beta_1/\gamma,\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

由上述分析可知：

(1) 非简并情况下，光线变换矩阵为$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$的光学系统存在两种等效变换：浸液厚透镜和浸液薄透镜组。当 $B\neq 0$, $C\neq 0$ 时，这两种变换均成立，且彼此等价。公式中距离矩阵$\begin{pmatrix} 1 & h_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$($i=1$, 2)的矩阵元 h_i 为主距可正、可负亦可为零。而$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$的矩阵元 $\alpha\geqslant 0$ 时为二薄透镜间的几何距离，当 $\alpha<0$ 时其物理意义可按文献[2]中的方法对$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$矩阵作分解来理解；

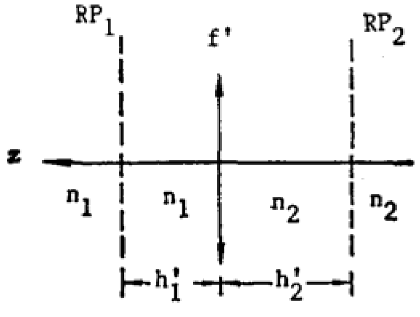

Fig. 4　Equivalent thick lens transformation (h_1', h_2', f') of an optical system ($n_2\rightarrow n_1$).

(2) 当 $n_1\neq n_2$ 时，光学系统不具有可易性质，即当物像空间互易时，光学系统的等效焦距要发生变化。例如，对图 2 所示的浸液厚透镜，由 $n_2\rightarrow n_1$ 的等效厚透镜参数，如图 4 所示。

$$\left.\begin{aligned} & h_1'=\frac{(n_2-n)l}{nR_2C'}=h_1,\ h_2'=\frac{n_2(n-n_1)l}{nn_1R_1C'}=h_2,\ C'=\frac{n_2}{n_1}C, \\ & \frac{1}{f'}=-C'=-\frac{1}{n_1R_1R_2}\left[(n_2-n_1)R_1+(n-n_1)R_2+\frac{(n-n_1)(n_2-n)}{n}l\right]=\frac{(n_2/n_1)}{f}, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

由(7)、(22)式知，当 $n_1=n_2$ 时才有

$$f=f'。\tag{23}$$

(3) 当 $C=0$ 时，(6)式失效，但(14)式仍可用，即此时只能作薄透镜组等效；$B=0$ 时，(14)式失效，但(6)式成立，这时只能作厚透镜等效；

(4) 物像空间折射率相等($n_1=n_2$)时的有关结果易于作为一般情况的特例而得出。在这种情况下，γ 矩阵约化为单位矩阵，光学系统的光线变换矩阵可用三个基本矩阵的有序乘积表示。第一类四种情况都约化为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & (A-1)/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & (D-1)/C \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & h_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & h_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}\tag{24}$$

第二类四种情况均约化为

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (D-1)/B & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (A-1)/B & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_1 & 1 \end{pmatrix}。\end{aligned}\tag{25}$$

三、$B=C=0$ 时的等效变换

当 $B=C=0$ 时，上面的分析失效，应重新推导。可分为二大类四种情况

1．第一类

$$(1)\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ -\beta_2 A & D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = (A-1)D/\beta_2 A,\ \beta_1 = -\beta_2 A, \\ &\alpha_2 = (1-A)/\beta_2 A,\ \gamma = AD, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

β_2 可根据实际情况取某一确定值。

$$(2)\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -\beta_1 D & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = (A-1)/\beta_1,\ \gamma = AD, \\ &\alpha_2 = (1-A)/\beta_1 D,\ \beta_2 = -\beta_1 D, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

β_1 取某一确定值。

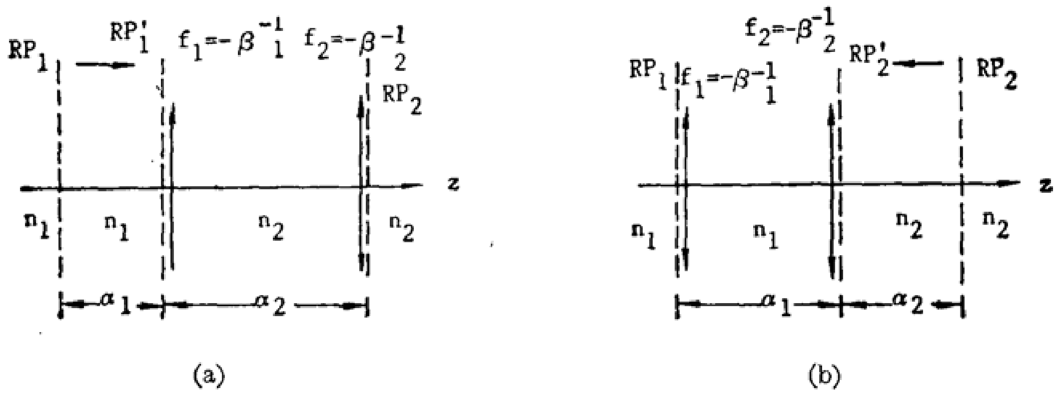

Fig. 5 An optical system with ray transfer matrix $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ can be equivalent to a combination of a thin lens and a thick lens as shown in Fig. (a), (b)

显然，这两种情况分别等效于图5(a)、(b)所示的浸液薄透镜与厚透镜的组合，通过使用参考面移动技巧($RP \to RP'$)后等效为一个浸液薄透镜组。

2. 第二类

$$(1)\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & -\alpha_2 D \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_2 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta_1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = -\alpha_2 D,\ \beta_1 = (1-A)/\alpha_2 D, \\ &\beta_2 = (A-1)/\alpha_2,\ \gamma = AD, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

α_2 取某一确定值。

$$(2)\ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -\alpha_1 A \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{32}$$

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_2=-\alpha_1 A,\ \beta_1=(1-A)/\alpha_1 A,\\ &\beta_2=(A-1)D/\alpha_1 A,\ \gamma=AD,\end{aligned}\right\} \tag{33}$$

α_1 取某一确定值。

(30)、(33)式的物理意义是十分明显的，它们分别等效于图6(a)、(b)所示的浸液薄透镜组加上一段距离，移动参考面($RP\rightarrow RP'$)后，仍等效于一个浸液薄透镜组。

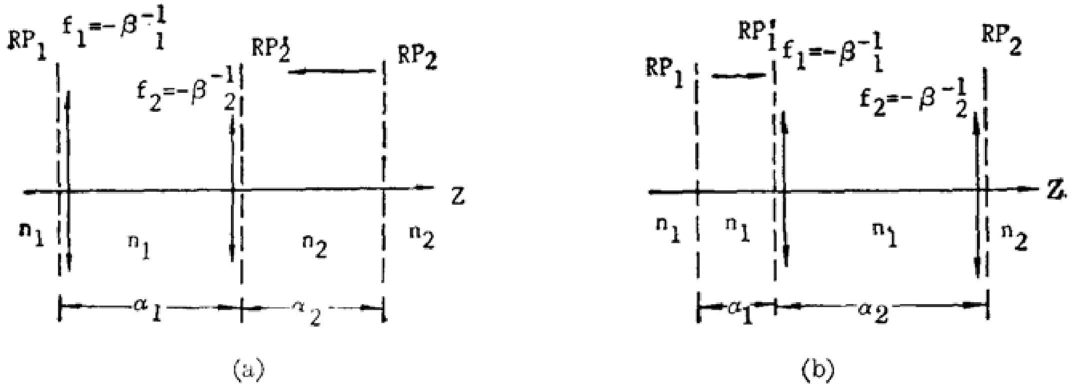

Fig. 6 An optical system with ray transfer matrix $\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$ can be equivalent to a combination of two thin lenses and a distance as shown in Fig. (a), (b)

四、数值计算例

现举出四个典型数值计算例来说明所得结果。

例1 A、B、C、D 矩阵元都不为零

设计一光学系统，使 $A=0.5$, $B=0.05\,\mathrm{m}$, $C=-5\,\mathrm{m}^{-1}$, $D=2.5$。由(3)～(6)式计算得

$$\alpha_1=h_1=-0.2\mathrm{m},\ \alpha_2=h_2=0.1\,\mathrm{m},\ \beta=C=-5\,\mathrm{m}^{-1},\ \gamma=n_1/n_2=1.5,\ f=0.2\,\mathrm{m}。$$

故

$$\begin{pmatrix}0.5 & 0.05\\ -5 & 2.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0.2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0.1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0.2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{34}$$

即这一光学系统可等效于一个像方焦距 $f=0.2\,\mathrm{m}$, 主距 $h_1=-0.2\,\mathrm{m}$, $h_2=0.1\,\mathrm{m}$ 的浸液厚透镜，其物、像空间的相对折射率 $n_{12}=(n_1/n_2)=1.5$。

例2. $C=0$, $B\neq 0$

设 $A=-2$, $B=0.5\,\mathrm{m}$, $C=0$, $D=-0.75$。由(14)、(15)式得

$\alpha=0.5\,\mathrm{m}$, $\beta_1=-6\,\mathrm{m}^{-1}$, $\beta_2=-4.5\,\mathrm{m}^{-1}$, $\gamma=(n_1/n_2)=1.5$, $f_1=0.167\,\mathrm{m}$, $f_2=0.22\,\mathrm{m}$,

故

$$\begin{pmatrix}-2 & 0.5\\ 0 & -0.75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4.5 & 1.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0.5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix} \tag{35}$$

即它可等效于一个相距 0.5 焦距分别为 $f_1=0.167\,\mathrm{m}$, $f_2=0.22\,\mathrm{m}$ 的浸液薄透镜组，其中薄透镜 f_1 浸在折射率为 n_1 的介质之中，薄透镜 f_2 两侧介质折射率分别为 n_1、n_2，$(n_1/n_2)=1.5$。

例 3 $B=0,\ C\neq 0$

设 $A=2$, $B=0$, $C=1.5\,\mathrm{m}^{-1}$, $D=0.75$, 由(3)～(6)式得 $\alpha_1=h_1=-0.5\,\mathrm{m}$, $\alpha_2=h_2=0.667\,\mathrm{cm}$, $\beta=1.5\,\mathrm{m}^{-1}$, $\gamma=(n_1/n_2)=1.5$, $f=-0.667\,\mathrm{m}$, 故

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1.5 & 0.75\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}1 & 0.667\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1.5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0.5\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1 & 0.667\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1.5 & 1.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -0.5\\ 0 & 1\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{36}$$

它可等效为一个 $f=-0.667\,\mathrm{m}$, $h_1=-0.5\,\mathrm{m}$, $h_2=0.667\,\mathrm{m}$ 的浸液厚透镜，

$$n_{12}=(n_1/n_2)=1.5。$$

例 4 $B=C=0$

设 $A=D=1$, $B=C=0$, 由(26)～(27)式，取 β_2 为某一常数，则 $\alpha_1=\alpha_2=0$, $\beta_1=-\beta_2$, $\gamma=(n_1/n_2)=1$, $f_1=1/\beta_2$, $f_2=-1/\beta_2$, 故

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\beta_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta_2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -\beta_2 & 1\end{pmatrix}, \tag{37}$$

这表示，当 $n_1=n_2$ 时，用两个紧靠的、焦距数值相等符号相反的薄透镜组可实现恒等变换。

五、小　结

(1) 矩阵光学(包括列阵光学)中一个重要结论是，任何一个可以写出光线变换矩阵的光学系统，均可在形式上等效为一个薄透镜[4]。值得注意的是，文献[4]中这一结论是对等效变换矩阵而言的(例如，相位共轭反射镜的第 II 变换矩阵)，等效薄透镜焦距的形式公式中一般含有物距。本文讨论的是光线变换矩阵。我们在普遍情况下证明了：当 $C\neq 0$ 时，光学系统形式上可等效为一个厚透镜，通过使用参考面移动技巧，即将参考面移动到二个主面后，这一系统就等效为一个薄透镜。对 $n_1\neq n_2$ 和 $n_1=n_2$ 情况，这一结论普遍成立。当 $C=0$ (即远焦系统)时，这种等效不成立，但可按本文所述方法和步骤形式上等效为一个薄透镜组。

(2) 由于薄透镜、薄透镜组对光线(或光束)的变换规律是熟知的，使用本文的等效变换方法和所得结果原理上大为简化了复杂光学系统对光线(或光束)变换问题的分析。应注意的是这一等效的适用范围是光学系统前后参考面以外的区域，而不能用于光学系统内部。例如分析复杂多元件光学谐振腔内的模式结构，则应采用其它的等价腔方法[5]。

参 考 文 献

[1] H. Kogelnik, T. Li; *Proc. IEEE*, 1966, **54**, No. 10 (Oct), 1312～1329.
[2] L. W. Casperson; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 13 (1 Jul), 2243～2249

[3] 卢亚雄等;《矩阵光学》,(大连理工大学出版社,1989), 28~30。
[4] 王绍民;《杭州大学学报》,1984, **11**, No. 1 (Jan), 1~13。
[5] 吕百达;《激光光学》,(四川大学出版社,成都,1986), 223~228。

Equivalent transformation of optical systems

LÜ BAIDA
(Depart ent of Physics Sichuan University Chengdu 610064)

JI XIAOLING
(Department of Physics, Chongqing Teachers Institute, Chongqing 630000)

(Received 12 September 1990; revised 4 December 1990)

Abstract

In general case equivalent transformation of optical systems is discussed in detail by using matrix methods. It has been shown that the optical system with ray transfer matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ can be equivalent to a thin lens, if $C \neq 0$, or to a conbination of two thin lens, if $C=0$. The results given in this paper is useful for analysing the transformation of ray or beam through a complex optical system and the problems of multielement resonators.

Key words: equivalent transformation, matrix optics, synthesis of optical system.