

# 弥散体相关散射的体-面平均 直径 $D_{32}$ 的检测

胡柱国 牛社团

(西安交通大学物理系, 西安 710049)

## 提 要

本文应用分层模型处理较高浓度的弥散体产生的相关散射。计算各层满足单散射条件时的相函数,求得散射几率函数,利用它再计算前向散射的光能分布;对于较大微粒,按衍射理论计算,建立多重散射模型,应用迭代法计算多重散射的光能量分布;测量了不同浓度的玻璃微珠产生的散射光能量功率谱,将其与模拟计算值作比较,并以上限分布函数作有约束的优化处理,计算了  $D_{32}$ 。文中用图像分析系统对样品作出二值化图,把统计数据与测量结果作了比较。

关键词: 光的吸收与散射; 探测与量度。

## 一、前 言

在稀薄(满足非相关散射条件)弥散体作粒径分析的研究中,通常运用(Malvern)粒度测试仪<sup>[1]</sup>。它能较精确地解决对大粒径( $\bar{d} > 10\lambda$ )微粒平均直径及其分布的测量。但由于 Malvern 仪是以夫朗和斐(Fraunhofer)衍射理论模型为基础的,当微粒较小或是相对折射率接近于1.0时,则会产生较大的误差<sup>[2]</sup>。Alger<sup>[3]</sup>曾做过克服夫朗和斐近似的局限性的计算和测试。近年来,有人以输运理论分析高浓度弥散体粒径分布的报道<sup>[4]</sup>,并作了相应的实验研究,这些工作都曾取得了一定程度的进展。本文从理论上采用分层模型分析多重散射过程,设置较合理的计算程序,模拟计算相关散射的光能分布,得出很宽的粒径分布范围。实验方面做了标定测试。使用计算机对样品作模式识别处理,得出样品的二值化图;再用图像分析仪对二值化图作统计,得出粒径分布直方图,与模拟计算的结果符合良好。

## 二、前向散射几率

为了计算高浓度弥散体对入射光波产生的多重散射能量的分布,首先要求出满足非相关、单散射条件的散射光能分布的相函数(即几率函数)。在一定的约束条件下,把各非相关的散射光能分布值作离散化求和,就可以求出相关多重散射条件下的光能分布值。

### 1. 非相关、单散射弥散体的相函数

对于无因次直径  $\alpha < 30$  的单个球形微粒,它对平面入射光波的散射光能角分布  $P_M(\theta)$  可按米(Mie)散射相函数计算<sup>[5]</sup>:

$$P_M(\theta) = \frac{2}{K\alpha^2} [\psi_1(\alpha, m, \theta) + \psi_2(\alpha, m, \theta)], \quad (1)$$

式中  $\alpha, m, \theta$  分别为微粒的无因次直径 ( $\pi d/\lambda$ )、折射率和散射角；垂直和平行于散射平面上的偏振光强度  $i_1$  和  $i_2$ ，总散射系数  $K$  分别为

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} (a_l \pi_l + b_l \tau_l) \right|^2, \\ i_2 &= \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{l(l+1)} (a_l \tau_l + b_l \pi_l) \right|^2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$K = \frac{2}{\alpha^2} \sum_{l=1}^{\infty} (2l+1) (|a_l|^2 + |b_l|^2), \quad (3)$$

式中  $a_l, b_l$  为米散射系数， $\pi_l, \tau_l$  为米散射角函数。对于较大微粒，根据判据条件<sup>[7]</sup>：

$$p = \frac{2\pi d |m-1|}{\lambda}, \quad (4)$$

来划定衍射效应。本实验部分，对样品的最大无因次粒径估计为  $\alpha_{\max} = 300$ ，故取  $p \geq 50$ 。这时单个微粒的相函数为<sup>[8]</sup>

$$P_F(\theta) = 4\alpha^2 \left[ \frac{J_1(\alpha \sin \theta)}{\alpha \sin \theta} \right]^2, \quad (4)$$

式中  $J_1(\alpha \sin \theta)$  是一阶贝塞耳(Bessel)函数。全部微粒的平均散射相函数是

$$\overline{P(\theta)} = \frac{\int_0^{\infty} \sigma_s P(\alpha, m, \theta) f(\alpha) d\alpha}{\int_0^{\infty} \sigma_s f(\alpha) d\alpha}, \quad (5)$$

式中  $f(\alpha)$  是粒径分布函数。 $\sigma_s$  是散射截面\*。于是，入射光波被弥散体散射到单位立体角范围内的几率函数是

Table 1 Beam-ray unit

unit	$\theta_i(\text{mrd})$		unit	$\theta_i(\text{mrd})$		unit	$\theta_i(\text{mrd})$	
	下限	上限		下限	上限		下限	上限
1	0.00	0.688	13	14.488	15.940	25	32.469	34.006
2	0.688	1.586	14	15.940	17.404	26	34.006	35.546
3	1.586	2.610	15	17.404	18.878	27	35.546	37.008
4	2.610	3.734	16	18.878	20.361	28	37.008	38.637
5	3.734	4.936	17	20.361	21.853	29	38.637	40.184
6	4.936	6.197	18	21.853	23.351	30	40.184	41.733
7	6.197	7.506	19	23.351	24.856	31	41.733	43.283
8	7.506	8.852	20	24.856	26.367	32	43.283	44.836
9	8.852	10.228	21	26.367	27.884	33	44.836	46.390
10	10.228	11.629	22	27.884	29.406	34	46.390	47.946
11	11.629	13.049	23	29.406	30.936	35	47.946	49.502
12	13.049	14.488	24	30.936	32.469	36	49.502	51.059

\* 可按文献[6]方法计算。

$$p(\theta_i) = \frac{1}{2} \int_{\theta_{i, \min}}^{\theta_{i, \max}} P(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (6)$$

利用  $p(\theta_i)$  求前向散射的能量分布值, 采用定步长 ( $\Delta\alpha=5$ ) 辛甫生积分法<sup>[9]</sup> 计算。

## 2. 散射的角几率分布计算

引入“射线束”单元来对应环形光电探测器, 各个环可能接收到的光功率谱, 即具有相同散射角的那些光线束构成一个“射线束”单元。用焦距为 316.25 mm 的傅里叶镜, 按表 1 取“射线束”单元及其相应的散射角。按公式 (1)、(4)、(5)、(6) 计算得到前向散射角几率分布。部分的计算结果如图 1 所示。

从图 1 所得结果证明了基于上述考虑的计算方法, 它能处理  $\alpha$  变化很宽的范围。由于计算把 36 环以内的光能量作为总能量, 故当  $\alpha=30$  时, 有部分散射光未包括在 36 环以内了, 导致了相应曲线的偏差。若采用前向散射光能量归一化法求散射几率角分布<sup>[10]</sup>, 则当  $\alpha < 30$  时, 将会产生更大的误差。

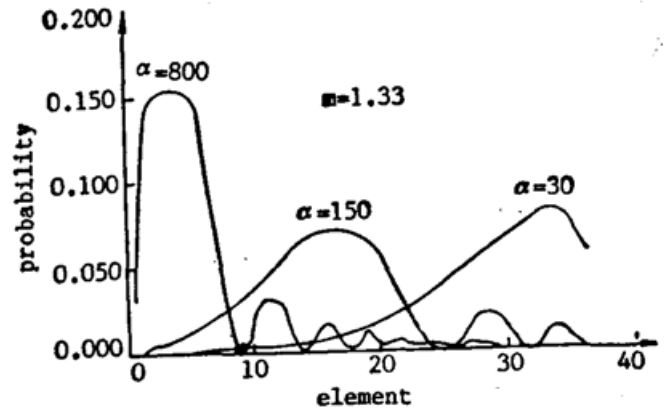


Fig. 1 The probabilities of forward scattering angular distribution

## 三、多重光散射的几何模型

### 1. 散射光能量的分配

采用文献 [10] 中图 2 作分析,  $E_k^m(\theta)$  代表第  $(m+1)$  个微粒夹层的第  $k$  个入射“射线束”的能量, 其入射角为  $\theta$ 。  $E_{jk}^{m+1}(\theta')$  代表第  $k$  个“射线束”穿过了夹层后散射成为第  $j$  个“射线束”的能量, 其散射角(相对  $k$  “射线束”)为  $\theta'$ ; 各束在远场的分布, 其截面是圆环形状。故上述两束有下面关系

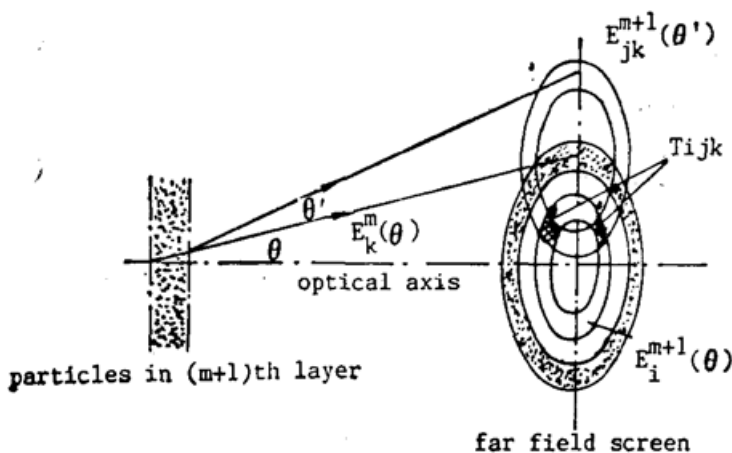


Fig. 2 Bear-ray and its section

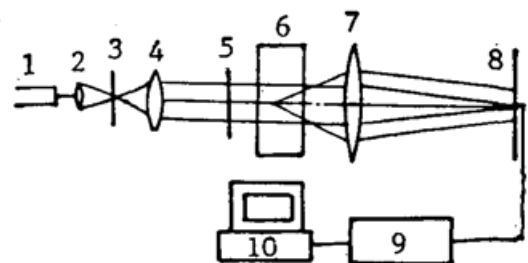


Fig. 3 Measuring arrangement

1—He-Ne laser, 2—beam expanding lens, 3—pin-hole filter, 4—collimating lens, 5—anti-Gaussian filter, 6—sample, 7—transform lens, 8—ring-array photoelectric detector, 9—matching circuit, 10—computer

$$E_{jk}^{m+1}(\theta') = p_j(\theta') E_k^m(\theta). \quad (7)$$

若用  $E_j^{m+1}(\theta)$  代表探测器第  $i$  环可能接收到的能量, 则  $E_{jk}^{m+1}(\theta')$  可能落到第  $i$  个环上的部分可表为

$$\Delta E_i^{m+1}(\theta) = T_{ijk} E_{jk}^{m+1}(\theta'). \quad (8)$$

式中  $T_{ijk}$  如图 3 中圆环的交叠面积与  $E_{jk}^{m+1}(\theta')$  所对应的圆环面积的比值, 叫做能量传递系数。可从几何关系求得<sup>[10]</sup>。

## 2. 多重光散射的能量

平面光波通过弥散体的第  $(m+1)$  个夹层后的能量应包括<sup>[10]</sup>

(1) 从第  $m$  夹层穿过第  $(m+1)$  夹层的非散射入射光能量

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_{\text{unscat}}^{m+1} = p_{\text{unscat}} E_{\text{unscat}}^m, \\ p_{\text{unscat}} &= 1 - \int Q_{\text{sca}} \frac{\pi}{4} D_p^2 N(D_p) dD_p, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中  $p_{\text{unscat}}$  为入射光波未经散射的几率。设当夹层的透过率为 0.90 时, 满足单散射条件, 因此, 上式中第二项等于 0.10。

(2) 入射的非散射光产生的散射光能分布

$$E_2 = E_u^{m+1}(\theta_i) = p(\theta_i) E_{\text{unscat}}^m p_{\text{sca}}, \quad (10)$$

$p(\theta_i)$  按公式(6)计算。

(3) 入射的散射光产生的光能分布

$$E_3 = E_{\text{sca}}^{m+1}(\theta_i) = p_{\text{unscat}} E_{\text{sca}}^m(\theta_i). \quad (11)$$

(4) 入射的散射光产生的二次散射的光能分布

$$E_4 = E_{\text{sca}}^{m+1}(\theta_i) = \sum_j \sum_k T_{ijk} E_{\text{sca}}^m(\theta_k) p(\theta_j). \quad (12)$$

所以通过第  $(m+1)$  个夹层的光能量为

$${}^{m+1}E(\theta_i) = \sum_{k=1}^4 E_k; \quad (13)$$

通过任意夹层  $N$  的光能量, 用迭代法求和得

$${}^N E(\theta_i) = \sum_k E_k(N); \quad (14)$$

通过全部夹层的光能量可用离散迭代求和得出

$${}^M E(\theta_i) = \sum_N {}^N E(\theta_i). \quad (15)$$

## 3. 分层数目估算

计算一定浓度的弥散体所产生的散射光能量分布时, 可采用分层模型处理。计算分层数目有理论公式和实验估算<sup>[11]</sup>。本文根据探测器的中心环的光能量变化数值来确定分层数目  $N$  的。

读取未放入样品时的能量值  $E_0$  和放入样品后的能量值  $E_1$ 。用  $T$  表示每一夹层的透过率, 故有

$$(E_1/E_0) = T^N, \quad \text{或} \quad N = \frac{\ln E_1 - \ln E_0}{\ln T}. \quad (16)$$

若取  $T=0.90$ , 对  $N$  取整, 便得到结果。

## 四、粒径的分布函数

采用上限分布规律来描写粒径的分布

$$f(\alpha) = c \frac{\exp\left\{-\left[\delta\left(\ln\frac{\alpha\alpha}{\alpha_{\max}-\alpha}\right)\right]^2\right\}}{\alpha^4(\alpha_{\max}-\alpha)}, \quad (17)$$

式中  $a, \delta, \alpha_{\max}$  为分布参数; 常数  $c$  由归一化条件得出。对于一定浓度的微粒计算分布参数的初值时, 可采用拟牛顿法<sup>[9]</sup>解非线性方程组<sup>[12]</sup>。又采用内点罚函数法<sup>[13]</sup>对  $f(\alpha)$  作约束优化。约束条件为  $10 > a > 0.02$ ,  $10 > \delta > 0.02$ ;  $1000 > \alpha_{\max} > \tilde{\alpha}$ , 其中  $\tilde{\alpha}$  为  $f(\alpha)$  的模态参数值。这样, Sauter 平均直径  $D_{32}$  为

$$D_{32} = \frac{\int_0^{\alpha_m} \alpha^3 f(\alpha) dx}{\int_0^{\alpha_m} \alpha^2 f(\alpha) dx} = \frac{\alpha_{\max}}{1 + a \exp(1/4\delta^2)}. \quad (18)$$

计算过程中, 要对(5)式中的  $f(\alpha)$  作优化处理, 即先给定分布参数初值, 由(5)式计算平均相函数  $\overline{P(\theta)}$ , 把它代入(6)式中, 计算  $p(\theta_i)$ 。又从(15)式算得总能量的分布值  ${}^M E(\theta_i)$ , 把它与测量值  $E_m(\theta_i)$  比较, 构成目标函数  $S_i$ 。利用有约束优化条件的方法处理, 使  $|{}^M E(\theta_i) - E_m(\theta_i)|^2$  达到最小, 便得到满足优化条件的上限分布特征参数  $a_{\text{opt}}, \delta_{\text{opt}}$  和  $(\alpha_{\max})_{\text{opt}}$ 。于是得到所需要的分布函数。

## 五、测量与结果

实验的测量装置如图 3 所示<sup>[12]</sup>。实验中水的体积为 600 ml, 弥散体散射区长度 80 mm。玻璃微珠折射率 1.53 (厂家给出), 置于水中的相对折射率为 1.15。实验按不同浓度测量了 7 次, 按(附录 A)程序框图计算。结果列于表 2。

Table 2 Measuremental data of glass beads

glass beads mass (g)	0.25	0.50	0.75	1.25	1.50	1.75	2.00
$\alpha_{\max}$	143.2	140.3	142.9	144.8	139.9	142.7	141.4
$D_{32}$	44.24	43.76	43.52	44.56	42.98	43.76	42.80

用微粒图像分析系统\*对本样品作了数值分析统计, 其边缘二值化图如图 4 所示, 图中最小的一些二值像是系统噪声点。对大量微粒统计结果得分布直方图如图 5 所示。由此得到 Sauter 平均直径接近  $46.29 \mu\text{m}$ 。

测量值与标定值符合良好。但全部的计算量较大。原因在于对所选用的上限分布函数作优化处理程序较长。通过本文的分析与计算后, 作者正在寻找可能简化计算量的途径。

\* 西安交通大学能源系研制。

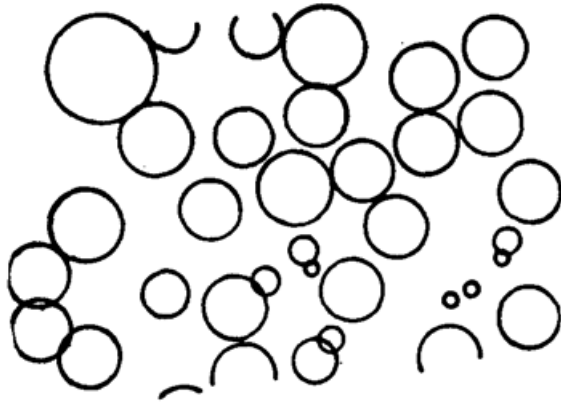


Fig. 4 Edge two-valued image of glass beads

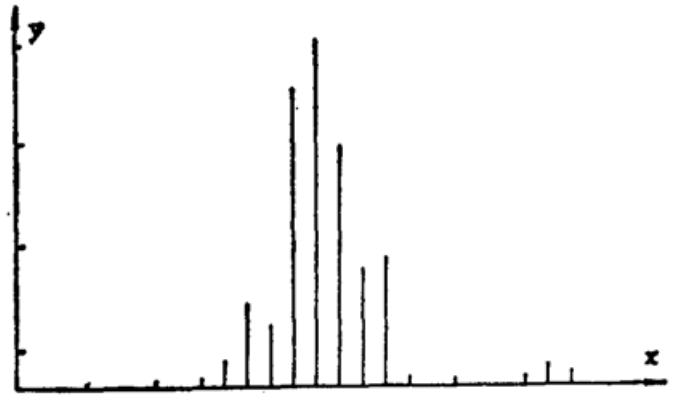
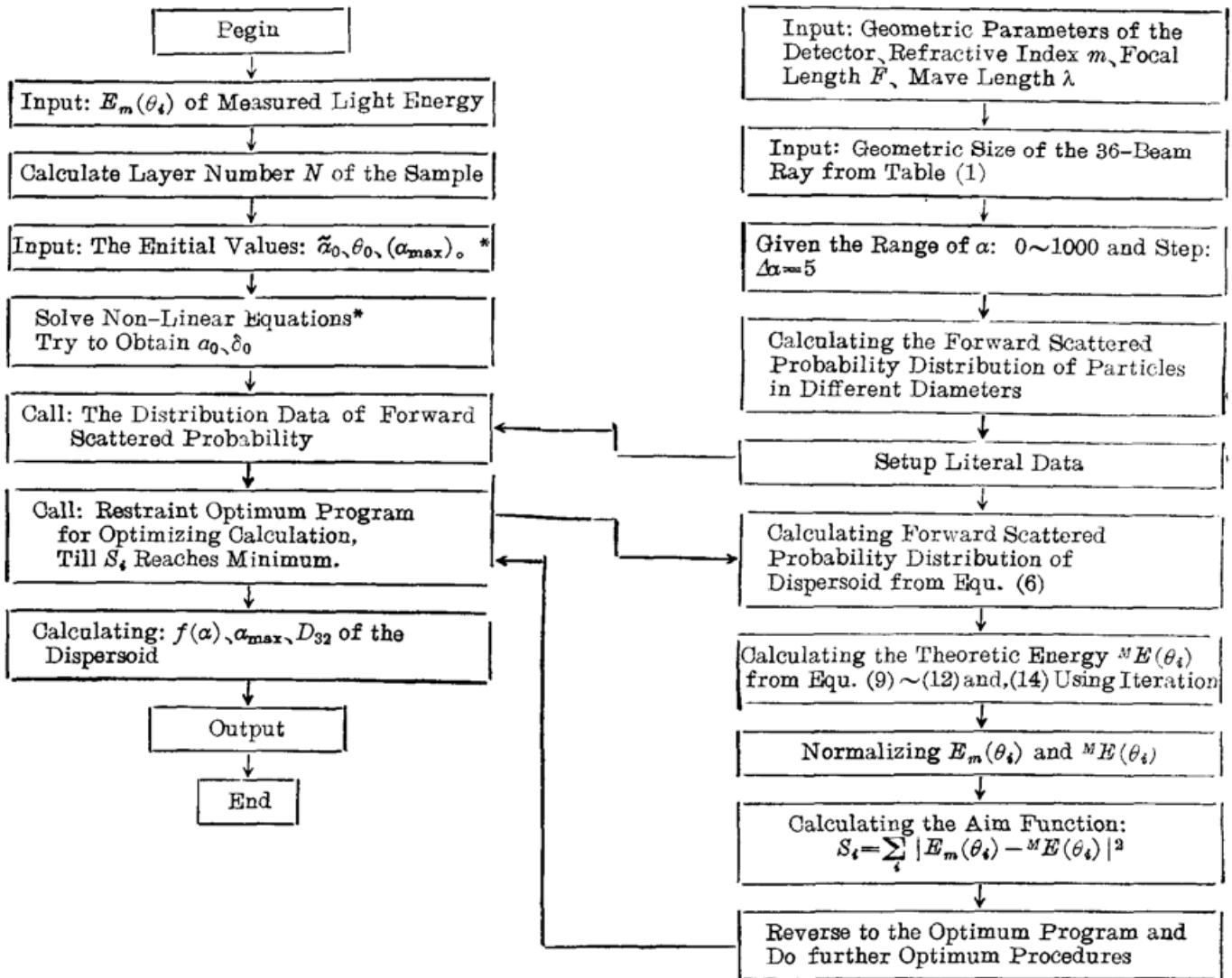


Fig. 5 Size distribution step diagrams sketch out from analyser

Appendix (A) Scheme for Calculating Size Distribution of Multiple Light Scattering by Dispersoid.



\* For the input-initial-values and the solution of non-linear equations please refer to literature [12].

参 考 文 献

[1] J. Swithenbank, J. M. Beer et al.; «AIAA 14th Aerospace Sciences Meeting, Jan. 26~28, 1976», 1~10.

- [2] 胡柱国等;《西安交通大学学报》, 1990, **24**, No. 1, 71~77.
- [3] T. W. Alger; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 20 (Oct), 3494~3501.
- [4] R. Santer, M.; Herman; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 15 (Aug), 2294~2299.
- [5] R. P. Dorp; *J. O. S. A.*, 1962, **52**, No. 4 (Apr), 402~408.
- [6] 顾冠亮、王乃宁等;《上海机械学院学报》, 1984, **5**, No. 4, 21~31.
- [7] G. B. Howard; *Modern Method of Particle Size Analysis*, (John Wiley & Sons, New York, 1984), 139.
- [8] R. Sauter, M. Hermar; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 15 (Aug), 2294~2299.
- [9] 刘德贵等;《FORTRAN 算法汇编》, (国防工业出版社, 北京, 1983).
- [10] Hiromi Gomi; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 19 (Oct), 3552~3558.
- [11] R. A. Dobbins, G. S. Jizmagian; *J. O. S. A.*, 1966, **56**, No. 4 (Apr), 1345.
- [12] 胡柱国, 盛德仁;《光学学报》, 1989, **9**, No. 12 (Dec), 1119~1125.
- [13] 机械原理电算程序集编写组;《机械原理电算程序集》, (高等教育出版社, 北京, 1987).

## Determination of volume-surface mean diameter $D_{32}$ for correlated scattering by dispersoid

HU ZHUGUO AND NIU SHETUAN

(Department of Physics, Xian Jiantong University, Xi'an 710049)

(Received 18 June 1990; revised 3 October 1990)

### Abstract

A ray tracing model is used to deal with correlated scattering by denser dispersoid. From the computation of phase function of each layer satisfying the condition of single scattering, the probability function of scattering is obtained, which is then used to calculate the optical energy distribution by forward scattering. The optical energy distribution of multiple scattering is calculated by using iteration based on a proposed multiple scattering model however, for larger particles, the calculation may be based on the diffraction theory. In order to optimize under restraint the upper limit distribution function, the measured values of optical energy spectrum scattered by dispersoid sample of various densities are compared with those obtained by simulation. The optimizing result obtained is used to calculate  $D_{32}$ . The experimental results are compared with the statistical data.

**Key words:** absorption and scattering of light; detection and measure.