

在相干理论的基础上分析光栅成像

金 天 允

(中央广播电视大学物理教研室, 北京 100856)

提 要

本文在相干理论的基础上, 推导了光栅成像中的光强分布和物像位置关系, 并给出一组具有不同参数的实验照片及一组借助计算机绘制的强度分布图。

关键词: 光栅成像; 傅里叶变换; 相干理论。

一、引 言

一系列讨论 Lau 效应的文章^[1~4]指出, 它仅仅是双光栅干涉的特殊情况, 两个光栅具有相同的周期, 干涉条纹定域在透镜的后焦面上, 这些典型 Lau 效应的条纹通常被看作是第一个光栅的像。还有一些文章讨论了修正的 Lau 氏干涉仪^[5, 6]。而 Leith 等发表了一系列文章讨论光栅成像^[7~10], 发现当两个光栅间的距离取一系列允许值时, 将在一系列位置上形成干涉条纹, 就这一点而言, 系统的性质很象菲涅耳波带板。在处理方法上, 通常用完全相干光照明时光波的迭加和传播理论来分析和处理问题, 特殊的情况下导出非相干照明的结果。

本文以相干理论为基础进行讨论。按 Van Cittert Zernike 定理, 由完全非相干光照明的第一个光栅可以看成是一个具有周期性结构的非相干光源。它将在第二个光栅上产生一个具有栅状结构的互强度函数。如果适当选择第二个光栅的周期, 那么第二个光栅对互强度函数抽样的结果, 将使其出射的光具有相干性, 在适当的位置上可产生干涉条纹^[2~4]。

二、理 论 推 导

1. 像平面上的光强分布

在图 1 中, G_1 和 G_2 是两个栅线互相平行, 相距为 z_0 的光栅, 观察屏 P 和 G_2 相距 z_1 。为了分析的方便, 假定它们都具有无限条栅缝。

设第一个光栅的强度透过率 $I(\xi)$ 和第二个光栅的振幅透过率 $T(x)$ 分别为

$$I(\xi) = G_1(\xi) \otimes \text{Comb}(\xi/d_1), \quad (1)$$

$$T(x) = G_2(x) \otimes \text{Comb}(x/d_2). \quad (2)$$

当一束完全非相干的、强度均匀的光照射在 G_1 上时, 按 Van Cittert Zernike 定理^[11], 透过光栅 G_2 后的光束具有互强度

$$\begin{aligned}
 J_{12}(x_1, x_2) &= J_{12}(\bar{x}, \Delta x) = A_1 T(x_1) \int T^*(x_2) \int I(\xi) \exp[-ik(r_2 - r_1)z_0] d\xi \\
 &= A_1 T(x_1) T^*(x_2) \int I(\xi) \exp[-ik\Delta x\xi/z_0] \exp(ik\Delta x\bar{x}/z_0) d\xi \\
 &= A_1 T\left(\bar{x} + \frac{\Delta x}{2}\right) T^*\left(\bar{x} - \frac{\Delta x}{2}\right) I_F\left(\frac{\Delta x}{\lambda z_0}\right) \exp\left(\frac{ik\Delta x\bar{x}}{z_0}\right), \quad (3)
 \end{aligned}$$

式中 r_1 和 r_2 分别为从 ξ 点到 x_1 和 x_2 的距离, $\bar{x} = [(x_1 + x_2)/2]$, $\Delta x = x_1 - x_2$, $I_F(\Delta x/\lambda z_0)$ 为 $I(\xi)$ 的傅里叶变换。在 P 面上观察到的光强分布

$$\begin{aligned}
 I(u) &= A_2 \iint J_{12}(x_1, x_2) \exp\left[-ik\frac{(r'_2 - r'_1)}{z_1}\right] dx_1 dx_2 \\
 &= A \int \left[I_F\left(\frac{\Delta x}{\lambda z_0}\right) \exp\left(-ik\frac{\Delta x u}{z_1}\right) \int T\left(\bar{x} + \frac{\Delta x}{2}\right) T^*\left(\bar{x} - \frac{\Delta x}{2}\right) \exp\left(ik\frac{\Delta x\bar{x}}{z}\right) d\bar{x} \right] d\Delta x \\
 &= A \int \left\{ I_F\left(\frac{\Delta x}{\lambda z_0}\right) \exp\left(-ik\frac{\Delta x u}{z_1}\right) [T_F^*(f) \exp(-i\pi\lambda z f^2)] \star [T_F(f) \exp(-i\pi\lambda z f^2)] \right\}, \\
 \frac{1}{z} &= \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1}, \quad f = -\frac{\Delta x}{\lambda z}, \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中 r'_1 和 r'_2 分别表示从 x_1 和 x_2 到 u 点的距离, $T_F(f)$ 为 $T(x)$ 的傅里叶变换。将(1)式和(2)式代入(4)式即可推导出

$$\begin{aligned}
 I(u) &= A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{t=-\infty}^{\infty} G_{2F}\left(\frac{n}{d_2}\right) G_{2F}^*\left(\frac{m}{d_2}\right) g_{1F} \\
 &\quad \times \left[-\frac{z(n-m)}{z_0 d_2} \right] \exp\left[i\pi\lambda z \frac{(m^2 - n^2)}{d_2^2} \right] \\
 &\quad \times \exp\left[i2\pi z \frac{(n-m)u}{z_1 d_2} \right] \delta\left[\frac{z(n-m)}{z_0 d_2} + \frac{t}{d_1} \right]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

(5)式中出现的 δ 函数意味着只有在条件

$$[z(n-m)/z_0 d_2] = -(t/d_1), \quad (6)$$

成立时, $I(u)$ 才不等于零, 这是由于 $I(\xi)$ 具有周期性结构, 因而具有分立的频谱的结果。

由(5)式可见, 如果令

$$\frac{\lambda z}{d_2^2} = q, \quad q = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

则

$$\exp\left[i\pi\lambda z \frac{(m^2 - n^2)}{d_2^2} \right] = \begin{cases} 1, & q = 2k \\ (-1)^{n-m}, & q = 2k+1 \end{cases}$$

这样

$$\begin{aligned}
 I(u) &= A' \sum_{t=-\infty}^{\infty} g_{1F}\left(\frac{t}{d_1}\right) V(t) \exp\left(i\frac{2\pi t z_0 u}{z d_1}\right), \\
 V(t) &= \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{2F}\left(\frac{n}{d_2}\right) G_{2F}^*\left(\frac{n}{d_2} + \frac{z_0 t}{z d_1}\right), & (\text{当 } q = 2k \text{ 时}) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} G_{2F}\left(\frac{n}{d_2}\right) G_{2F}^*\left(\frac{n}{d_2} + \frac{z_0 t}{z d_1}\right), & (\text{当 } q = 2k+1 \text{ 时}) \end{cases} \quad (8)
 \end{aligned}$$

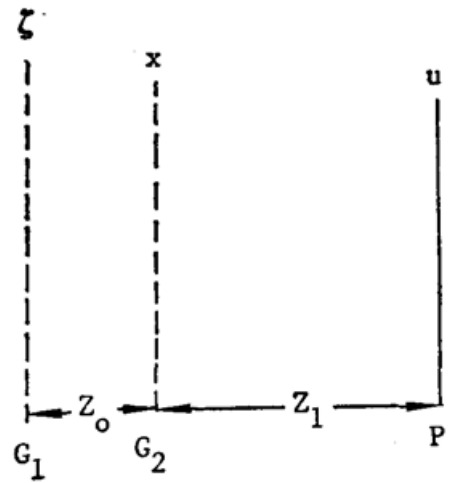


Fig. 1 General schematic diagram for grating imaging

方程(8)描述了 P 平面上一个周期为 $(z_1 d_1 / z_0)$ 的周期性结构分布。如果 G_2 的缝宽足够小, 它的频谱将趋近于一个和 t 无关的 Comb 函数, 此时 $I(u)$ 将趋近于 G_1 的精确像, 其放大率为 (z_1 / z_0) 。

2. 物像关系式

由(6)、(7)两式可以推导出

$$\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} = \frac{n-m}{t} \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{z_0}, \quad (9)$$

$$z_0 = \frac{q d_1 d_2}{\lambda} \frac{n-m}{t}, \quad (10)$$

如果适当选取 z_0 , 使 $z_0 = -(q M d_1 d_2 / \lambda)$ 即 $[(n-m)/t] = -M$ (M 是一个整数), (9)式将变为

$$\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} = -M \frac{d_1}{d_2} \frac{1}{z_0}, \quad (11)$$

这样 $V(t)$ 将变为

$$V(t) = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{2F}\left(\frac{n}{d_2}\right) G_{2F}^*\left(\frac{n}{d_2} - \frac{Mt}{d_1}\right), \quad (\text{当 } q=2k) \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n-m} G_{2F}\left(\frac{n}{d_2}\right) G_{2F}\left(\frac{n}{d_2} - \frac{Mt}{d_1}\right), \quad (\text{当 } q=2k+1) \end{array} \right\} \quad (12)$$

上述结论就与文献[7]的结论一致。

三、实验结果

为了检验上述理论推导的正确性, 本文作者进行了一组实验, 其结果如图 2 所示。光源是一个普通的钨丝灯泡, 让它产生的白光通过一块绿色的滤波片, 该片在 515 nm 和 735 nm 处分别有一个透射峰值, 照相底片在波长超过 690 nm 后对光的灵敏度开始下降, 因此将平均波长定为 570 nm 是合理的。这是一个宽带光源。实验中所用的两个光栅均为 Ranchi 光栅它们的周期分别为 254 μm 和 200 μm , 为了获得容易观察的条纹, 取参数 $M = -1$, $q = 1$ 和 $q = 2$, 各实验参量列于表 1 中。

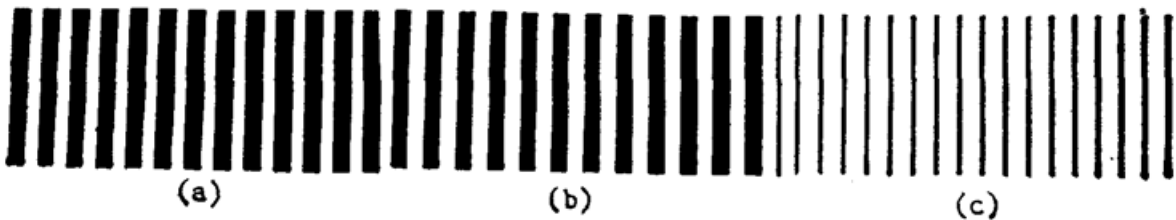


Fig. 2 Fringes of grating imaging

Table 1 Experimental data for the photographs of grating imaging in Fig. 2 ($\lambda = 570$ nm)

	d_1 (μm)	d_2 (μm)	M	q	z_0 (mm)	z_1 (mm)
a	254	200	-1	1	89	330
b	254	200	-1	2	178	660
c	200	254	-1	1	89	-419

对较大的 M 值, 条纹的对比度将下降, 在其他实验参数不变的条件下, 条纹需要用显微镜来观察, 图 2(c) 是一组虚条纹的照片。

图 3 是一组借助计算机绘制的条纹强度分布图。图 3(a) 的光源让氢离子激光通过旋转的毛玻璃而产生的狭带光源, 其条纹的可见度为 0.40; 图 3(b) 的光源是上述照片中所用的宽带光源, 条纹的可见度为 0.22; 图 3(c) 是以白光为光源条纹的可见度为 0.14。

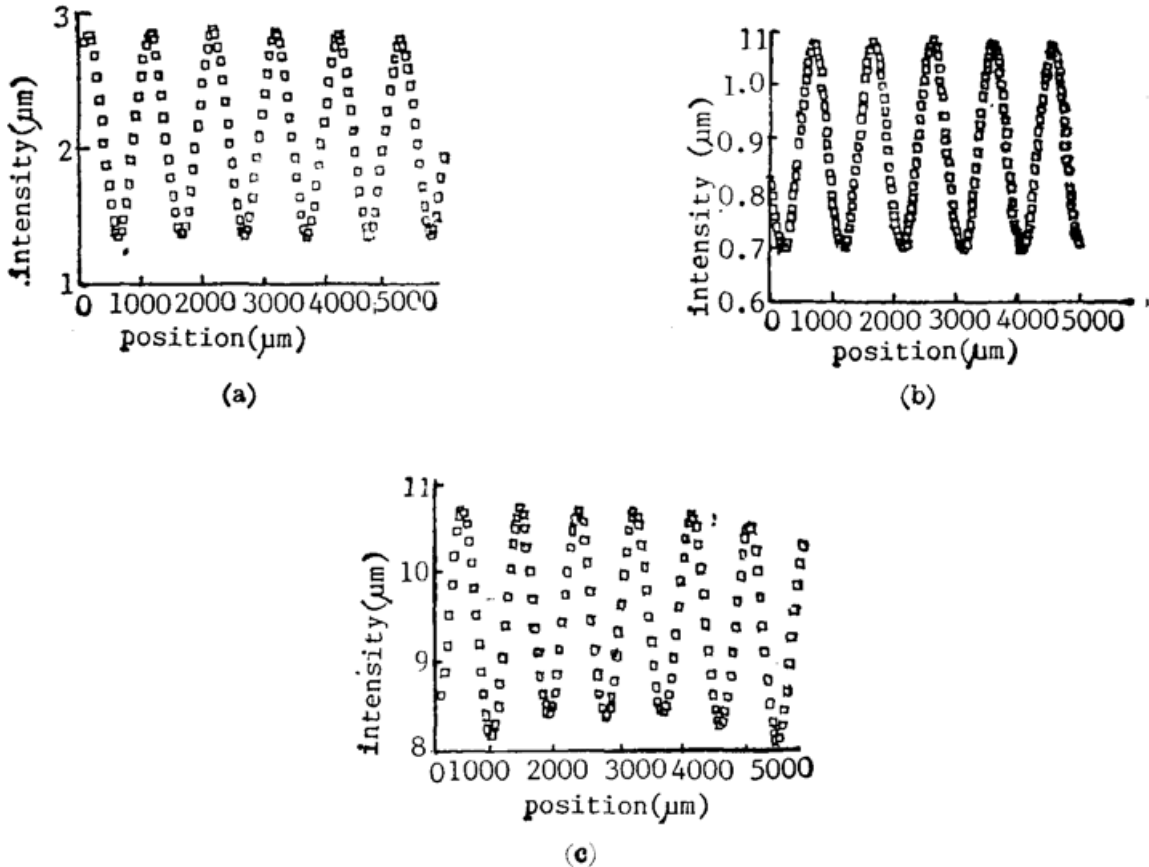


Fig. 3 Diagrams of the intensity distribution drawn by computer

四、结 论

本文在相干理论的基础上推导了光栅成像时像平面上的光强分布及物像公式, 并通过实验验证理论推导的结果。

光栅成像的过程实际上是相继的两个傅里叶变换的过程, 对第一个光栅的强度透过率进行一次傅里叶变换后, 获得 G_2 平面上的互强度函数; 而对穿过 G_2 后的互强度函数再进行一次傅里叶变换就获得像平面上的强度分布。 G_2 的抽样能力使它的作用好象一个空间滤波器, 对 $I(\xi)$ 的频谱进行滤波。从这个意义上讲, 观察面上的干涉条纹是 G_1 的经滤波后的像。而为了使菲涅耳近似下的传播过程中出现的二次位相因子消失, 使传播过程转变为傅里叶变换过程, 各个参量间必须满足一定的条件, 从这些条件即可推导出物像公式。

本文的实验部分是作者在美国得克萨斯大学阿灵顿分校物理系进修期间完成的, 作者对实验室工作人员给予的帮助表示感谢。

参 考 文 献

- [1] J. Jahns, A. W. Lohman; *Opt. Commun.*, 1979, **28**, No. 3 (Mar), 263~267.
- [2] F. Gori; *Opt. Commun.*, 1979, **31**, No. 1 (Oct), 4~8.
- [3] R. Sudol, B. J. Thompson; *Opt. Commun.*, 1979, **31**, No. 2 (Nov), 105~110.
- [4] R. Sudol, B. J. Thmpson; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 6 (15 Mar), 1107~1110.
- [5] K. Patorski; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 14 (15 Jul), 2396~2403.
- [6] S. Cartwright, A. Lightman; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 18 (15 Sep), 3114~3145.
- [7] J. Swanson, E. N. Leith; *J. O. S. A. (A)*, 1985, **2**, No. 6 (Jun), 789~793.
- [8] S. Leon, E. N. Leith; *Appl. Opt.*, 1987, **26**, No. 6 (15 Mar), 1117~1121.
- [9] J. Swanson, E. N. Leith; *J. O. S. A. (A)*, 1982, **72**, No. 5 (Mar), 552~555.
- [10] B. J. Chang, R. Alferness *et al.*; *Appl. Opt.*, 1975, **14**, No. 7 (Jul), 1592~1606.
- [11] J. W. Goodman; *«Statistical Optics»*, (John Wiley & Son, New York, 1985), 198, 208~209.

Analysis of grating imaging based on coherent theory

JIN TIANYUN

(Physics division, The Central Broadcast & T. V. University of China Beijing 100856)

(Received 5 December 1989; revised 6 June, 1990)

Abstract

The intensity distribution and the allowable locations of both object and image in grating imaging are derived from coherent theory. A group of experimental photographs with different parameters and a group of diagrams drawn by the aid of the computer are given in this paper.

Key words: grating imaging, Mutual intensity, Fourier transformation, coherent theory