

# 二值干涉型计算全息图

刘 向 东

(上海师范大学 计算机系, 上海 200234)

## 提 要

本文研究二值干涉型计算全息图, 这种全息图最适于综合位相型波前, 因此本文的讨论也只限于位相型波前的情况, 对物光和参考光的选择以及全息图的抽样进行了分析, 并得出相应的结论。

关键词: 计算全息图, 傅里叶频谱。

## 一、引 言

综合位相型波前的二值干涉型计算全息图具有简单、易制的特点, 即体现了计算全息的灵活性, 又与光学全息有密切联系。李威汉<sup>[1, 2]</sup>(Lee)、Ransom等人<sup>[3]</sup>以及 Waters<sup>[4]</sup>对这种全息图进行过研究。本文试图通过对其更细致的讨论而得出更完善的结果。

## 二、透 过 率

设有物波  $\exp[i\phi_0(x, y)]$  和参考波前  $\exp[i\phi_r(x, y)]$ 。对应的二值干涉型全息图的透过率可用傅里叶级数表示为

$$\left. \begin{aligned} t(x, y) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp[im\phi(x, y)], \\ a_m &= \frac{\sin m\pi q}{m\pi}, \\ \phi(x, y) &= \phi_0(x, y) - \phi_r(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

参数  $q$  可控制条纹宽度, 取值在 0 与 1 之间。当用参考光照射透过率为  $t(x, y)$  的透光片时, 透光片后表面的光波复振幅为

$$w(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp(i\{\phi_r(x, y) + m[\phi_0(x, y) - \phi_r(x, y)]\}). \quad (2)$$

可以看出,  $m = +1$  项对应的衍射即是物波乘以一个常数。

## 三、分离有用与无用衍射

为避免其它各阶衍射对一阶衍射的影响, 可用像光学全息中分离有用物波与无用透射波<sup>[5, 6]</sup>那样, 通过使物波束与参考波束的平均夹角足够大, 而使一阶衍射与其它各阶相分

离,体现在空间频率上就是使一阶衍射的频谱与其它阶频谱分离。作(2)式的傅里叶变换

$$W(\xi, \eta) = \mathcal{F}[w(x, y)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathcal{F}\{\exp[i\phi_r(x, y)]\} \otimes \mathcal{F}\{\exp[im\phi(x, y)]\}, \quad (3)$$

其中  $\otimes$  表示卷积运算。 $\xi, \eta$  分别是  $x$  和  $y$  方向的空间频率。为便于讨论,设参考波是平面波:  $\phi_r(x, y) = 2\pi\alpha x$ , 式中  $\alpha = (\sin \theta/\lambda)$  反映参考波相对于全息面的入射角, 这里  $\theta$  是物波的入射角,  $\lambda$  为波长。再记  $F_m(\xi, \eta) = \mathcal{F}\{\exp[im\phi(x, y)]\}$ ,  $m=0, \pm 1, \pm 2 \dots$  则(3)式可写成

$$W(\xi, \eta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m F_m(\xi - \alpha, \eta). \quad (4)$$

再作透过率(1)式的傅里叶变换

$$T(\xi, \eta) = \mathcal{F}[t(x, y)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m F_m(\xi, \eta), \quad (5)$$

比较(4)、(5)两式可看出

$$W(\xi, \eta) = T(\xi - \alpha, \eta). \quad (6)$$

即全息图后表面的光波复振幅的频谱是全息图透过率的频谱的线性位移。故当  $t(x, y)$  的  $\pm 1$  阶频谱与其它阶频谱分离时,  $w(x, y)$  的反应频谱也相分离。

设在区域  $D$  为  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2, F_1(\xi, \eta) \neq 0$ , 则由傅里叶变换的性质可推知  $F_m(\xi, \eta)$  的非零区域为  $m\xi_1 \leq \xi \leq m\xi_2, m\eta_1 \leq \eta \leq m\eta_2, (m \geq 0)$  或  $m\xi_2 \leq \xi \leq m\xi_1, m\eta_2 \leq \eta \leq m\eta_1, (m < 0)$ 。可以看出,如果  $\pm 1$  阶频谱在某一方向(如  $\xi$  方向)上与其它阶频谱分离(即不重叠),它们就在  $\xi-\eta$  频率平面上与其它阶频谱分离。

要使  $+1$  阶频谱与  $+2$  阶频谱在  $\xi$  方向分离,就须

$$\xi_2 < 2\xi_1, (\xi_1 > 0) \text{ 或 } 2\xi_2 < \xi_1, (\xi_2 < 0) \quad (7)$$

实际上这两个条件使  $\pm 1$  阶频谱与其它各阶频谱都分离来。(7)式条件下的各阶频谱的分布如图 1 所示。其分布关于  $\eta$  轴的左右对称映射。

有一特殊情况值得注意:当(2)式中  $g = (1/2)$  时,若  $m$  为非零偶数,有  $a_m = 0$ 。故(1)式中除第零项外的所有偶数项均为零。此时只需使  $+1$  阶频谱与  $+3$  阶频谱分离即可。

$$\xi_2 < 3\xi_1, (\xi_1 > 0) \text{ 或 } 3\xi_2 < \xi_1, (\xi_2 < 0) \quad (8)$$

再来看  $+1$  阶频谱自身。设物波前的傅里叶变换是  $G(\xi, \eta) = \mathcal{F}\{\exp[i\phi_0(x, y)]\}$ , 则

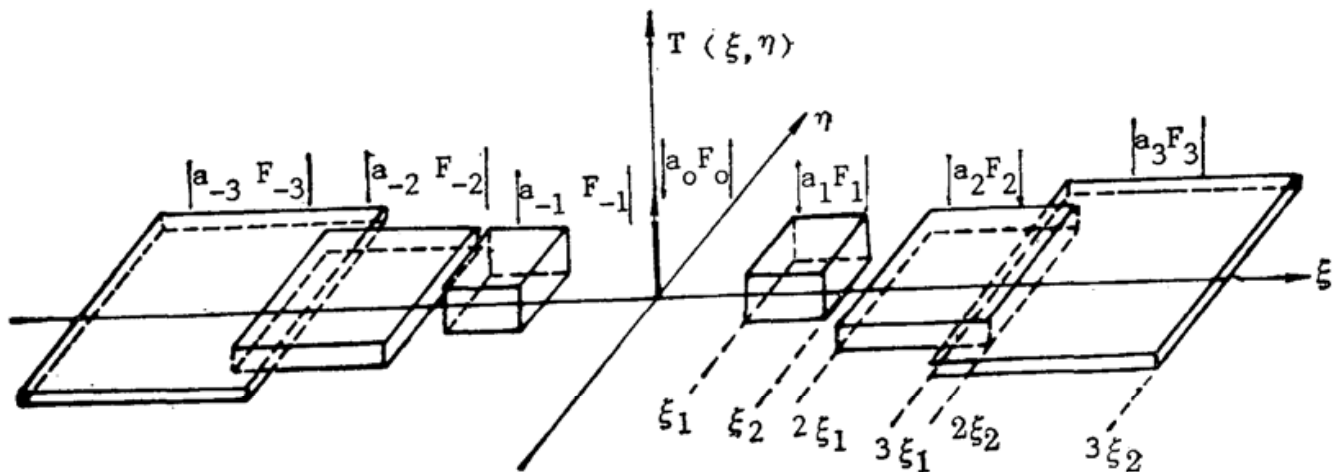


Fig. 1 Sketch of the amplitude spectrum of the transmittance  $t(x, y)$  under condition (9a)

$$F_1(\xi, \eta) = \mathcal{F}[\exp(i\phi(x, y))] = \mathcal{F}\{\exp(i[\phi_0(x, y) - 2\pi\alpha x])\} = G(\xi + \alpha, \eta) \quad (9)$$

故若  $G(\xi, \eta)$  的非零区域为  $\xi'_1 \leq \xi \leq \xi'_2, \eta'_1 \leq \eta \leq \eta'_2$ , 使用以前的假设与记号就有

$$\xi_1 = \xi'_1 - \alpha, \xi_2 = \xi'_2 - \alpha, \eta_1 = \eta'_1, \eta_2 = \eta'_2, \quad (10)$$

将(10)式代入(7)式可得

$$\alpha < 2\xi'_1 - \xi'_2, \text{ 或 } \alpha > 2\xi'_2 - \xi'_1 \quad (11)$$

类似地, 从(8)式可得

$$\alpha < \frac{1}{2}(3\xi'_1 - \xi'_2), \text{ 或 } \alpha > \frac{1}{2}(3\xi'_2 - \xi'_1) \quad (12)$$

(11)、(12)式给出了为分离一阶衍射与其它高阶衍射, 选择物光与平面参考光的准则。

### 四、抽 样

透过率函数  $t(x, y)$  须经抽样才便于计算机处理。设  $t_s(x, y)$  是对  $t(x, y)$  抽样所得的结果, 由计算机生成的全息图实际具有透过率  $t_s(x, y)$ 。当以参考光照射全息图时, 透射波为\*

$$w_s(x, y) = \exp[i\phi_r(x, y)]t_s(x, y), \quad (13)$$

设  $x, y$  方向的抽样率分别为  $N_x, N_y$ , 并记  $W_s(\xi, \eta) = \mathcal{F}[w_s(x, y)]$ ,  $W_s(\xi, \eta)$  就是(3)式中  $W(\xi, \eta)$  的周期性重复\*\*, 且在  $\xi, \eta$  方向上的重复周期分别为  $N_x, N_y$ 。因而抽样有可能引起新的频谱混叠。

为简单起见, 再次取  $\phi_r(x, y) = 2\pi\alpha x$ 。设  $T_s(\xi, \eta) = \mathcal{F}[t_s(x, y)]$ , 由(13)式得

$$W_s(\xi, \eta) = T_s(\xi - \alpha, \eta) \quad (14)$$

这样又可把透过率  $t_s(x, y)$  及其频谱  $T_s(\xi, \eta)$  作为研究对象。

由第3节的讨论知,  $+1$  阶频谱满足  $\xi_1 > 0$  和  $\xi_2 < 0$  两种情况是对称的。下面只讨论前一种情况。另外设  $B_x, B_y$  分别为  $\pm 1$  阶频谱在  $x, y$  方向上的带宽:  $B_x = 2\max(|\xi_1|, |\xi_2|)$ ,  $B_y = 2\max(|\eta_1|, |\eta_2|)$ 。

先考虑  $y$  方向上的抽样。若  $N_y > B_y$ , 则  $T_s(\xi, \eta)$  的分布如图2所示。可见  $\pm 1$  阶频谱

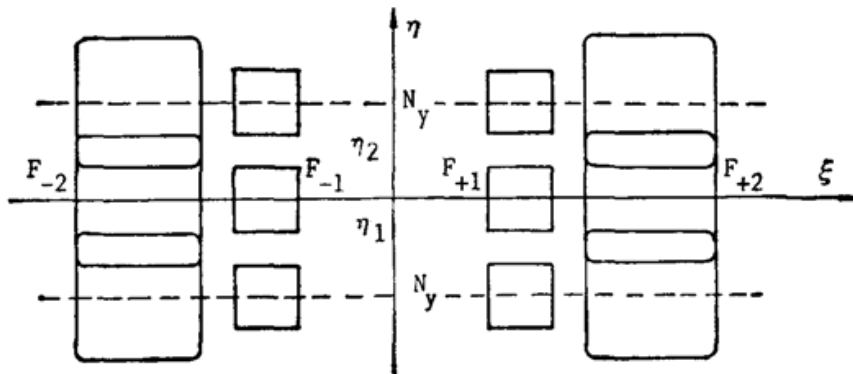


Fig. 2 Distribution of  $T_s(\xi, \eta)$ , spectrum of  $t_s(x, y)$  which is obtained by sampling  $t(x, y)$  along the  $Y$  direction

\*  $W_s(x, y)$  也可理解为是对(3)式中  $w(x, y)$  直接进行抽样的结果。

\*\* 重复部分的幅度由抽样方式决定。

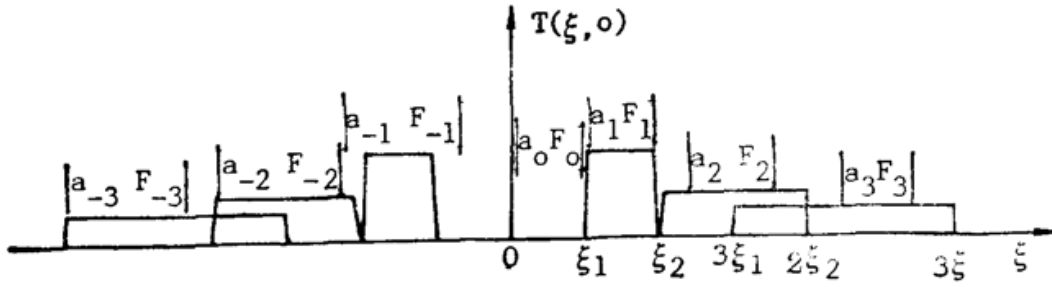


Fig. 3 The amplitude spectrum  $|T(\xi, \eta)|$ , viewed in the  $\eta$  direction, assuming the +1 order is non-zero in the region  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2 (=2\xi_1)$  along the  $\xi$  direction

在  $\eta$  方向上没有受到干扰。因此取  $N_y > B_y$  是合理的。

再考虑  $x$  方向的抽样。由于  $t(x, y)$  在  $x$  方向上的带宽不是有限的, 抽样必然引起频谱混叠。不过各阶频谱的幅度随阶数升高而近似以调和级数下降 (参见文献[9])。因此选择适当高的抽样率  $N_x$ , 使  $\pm 1$  阶频谱仅与某一阶以上的高阶频谱混叠, 就可使  $\pm 1$  阶频谱所受影响小于某一确定量。

为便于讨论, 将  $t(x, y)$  的频谱分布 (图 1) 的  $\xi - |T(\xi, \eta)|$  剖面如图 3 所示。其中设  $\xi_2 = 2\xi_1$ , 即 +1 阶频谱与 +2 阶正好相接。

如果  $N_x = B_x$ ,  $T_s(\xi, \eta)$  的分布的  $\xi$  方向剖面如图 4 所示。±1 阶频谱互不混叠, 但 +1 阶频谱受到 -2 阶、+3 阶等频谱的干扰; -1 阶频谱受到 +2 阶、-3 阶等频谱的干扰。

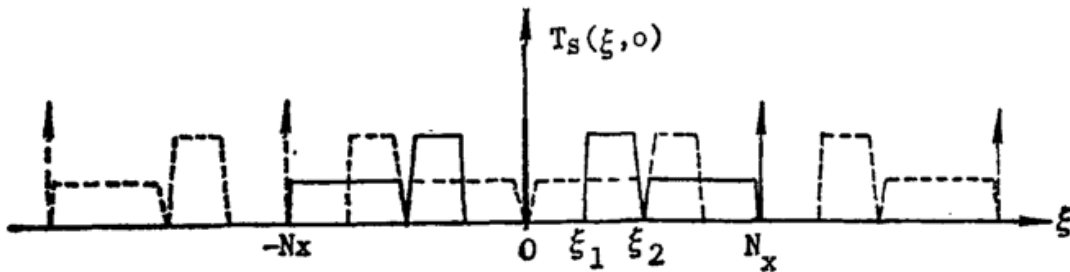


Fig. 4 Distribution of  $|T_s(\xi, \eta)|$  viewed in the  $\eta$  direction. Since only the distribution is of interest, for convenience, impulse sampling is assumed

类似地可推得: 当  $N_x = 2B_x$  时, 与  $\pm 1$  阶频谱混叠的 4 阶及以上阶的频谱; 当  $N_x = 3B_x$  时, 则是 6 阶及以上阶的频谱。

如果(2)式中  $q = 1/2$ , 设  $\xi_2 = 3\xi_1$ , 即 +1 阶频谱正好与 +3 阶相接, 则与  $\pm 1$  阶频谱混叠的频谱在  $N_x = B_x$  时是 3 阶及以上阶; 在  $N_x = 2B_x$  时是 5 阶及以上阶; 在  $N_x = 3B_x$  时是 7 阶及以上阶。

若实际上  $\xi_2 < 2\xi_1$  (或  $q = 1/2$ , 而  $\xi_2 < 3\xi_1$ ),  $\pm 1$  阶频谱受干扰情况比上面所述还要轻些。

还应指出, 用计算机图形或图像设备输出  $t(x, y)$ , 对其所作抽样可看作是所谓平顶抽样<sup>[7]</sup>。由抽样引起的频谱重复的旁瓣部分幅度很小, 对应的衍射很弱。当然各阶频谱也都有了一定的畸变。图 5 示出了平顶抽样的抽样脉冲及  $T_s(\xi, \eta)$  在  $\xi$  方向上的分布情况和大致幅度。

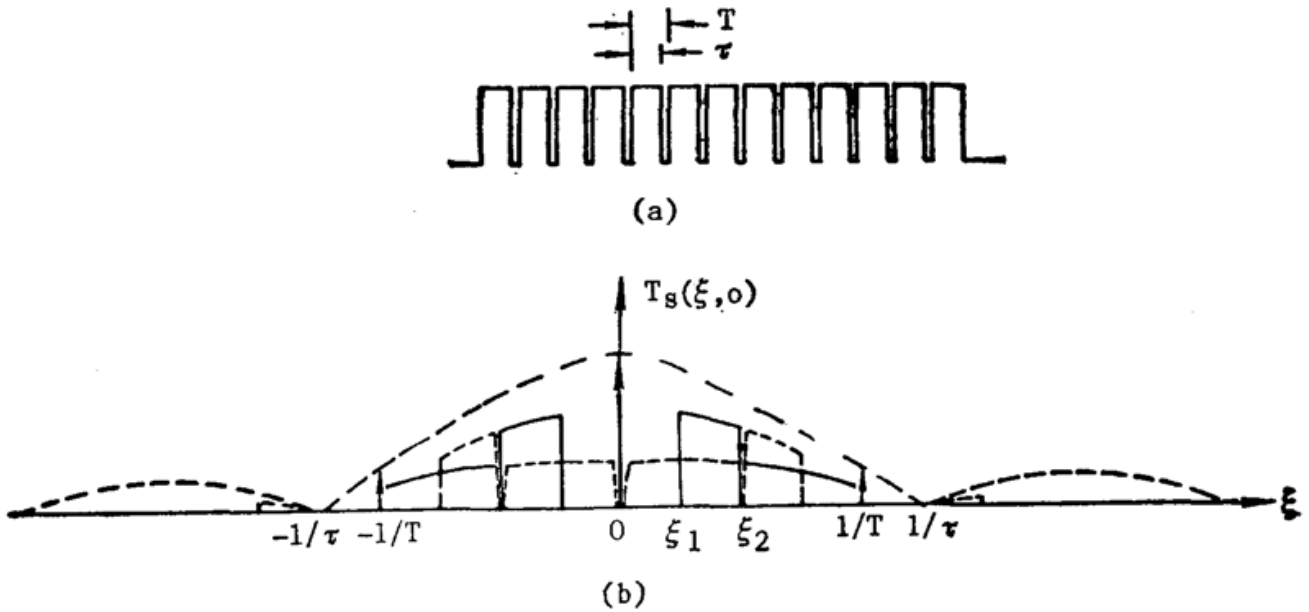


Fig. 5

- (a) The pulse signal used in flat-top sampling, with pulse duration  $\tau$  and period  $T$ .
- (b) The distribution of the flat-top sampled  $|T_s(\xi, \eta)|$  viewed in the  $\eta$  direction. The amplitude is enveloped by the sinc function.

### 五、实 验

现在制作一张点光源的全息图, 设有图 6 所示的设置。单色点光源  $P$  位于  $z$  轴上 ( $O, O, -F$ ) 处。一束单色平面光沿  $z$  方向垂直照射在位于  $XOY$  平面上的全息片  $H$  上。

设  $F \gg R_2$ , 对  $P$  点发出的球面光在  $XOY$  平面上的复振幅作菲涅耳近似, 且忽略振幅幅度大小的变化, 则

$$O(x, y) = \exp[i\phi_0(x, y)] = \exp\left[i\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{x^2 + y^2}{2F} + \phi_1\right)\right], \quad (15)$$

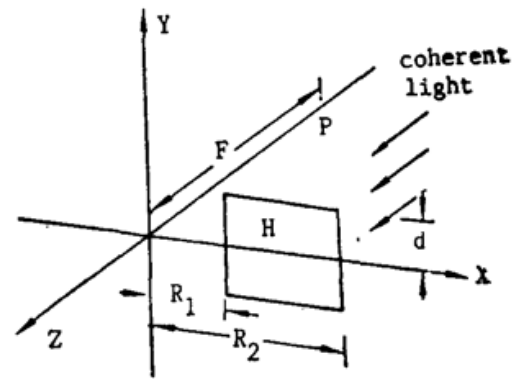


Fig. 6 Experiment scheme

而平面光在  $XOY$  平面上的复振幅仅为常数

$$r(x, y) = \exp[i\phi_r(x, y)] = \exp(i\phi_2). \quad (16)$$

式中  $\lambda$  是光波波长,  $\phi_1, \phi_2$  是初始位相, 为求得  $O(x, y)$  的非零频谱范围, 采用求局部空间频率的近似方法。

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \phi_0(x, y) = \frac{x}{\lambda F}, \\ v_y(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \phi_0(x, y) = \frac{y}{\lambda F}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$O(x, y)$  在  $H$  面上  $x, y$  方向上的空间频率的范围就可确定为

$$\xi'_1 = R_1/\lambda F, \quad \xi'_2 = R_2/\lambda F; \quad \eta'_1 = -d/\lambda F, \quad \eta'_2 = d/\lambda F. \quad (18)$$

所制作的全息图取  $q=1/2$ , 由(12)式

$$0 < \frac{1}{2}(3\xi'_2 - \xi'_2), \quad (19)$$

故有

$$R_2 < 3R_1. \quad (20)$$

全息图  $x$  方向抽样率取为  $N_x = 4B_x = 8|\xi'_2| = (8R_0/\lambda F)$ 。 $y$  方向抽样率应不小于  $O(x, y)$  在  $y$  方向上的带宽, 即  $N_y > B_y = 2|\eta'_2| = (2d/\lambda F)$ 。实验中  $R_2 > d$ , 为方便, 也取  $N_y = (8R_2/\lambda F)$ 。

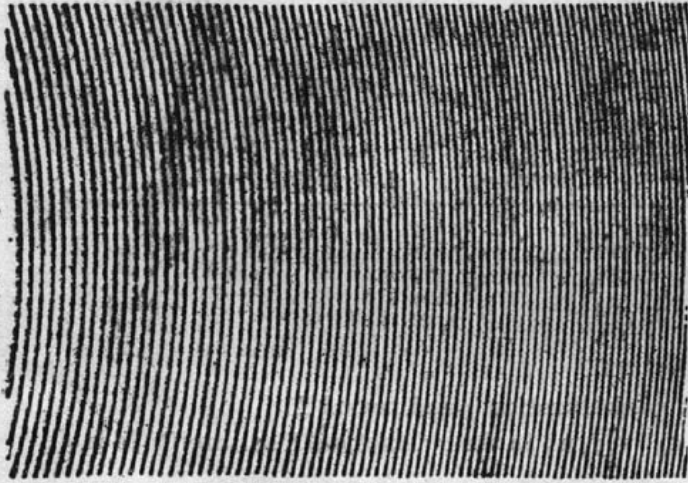


Fig. 7 Portion of the CGH obtained (enlarged)

绘制全息图所用的是  $D_{800}$  绘图仪。依据其绘图精度和幅面尺寸, 再考虑到取  $\lambda = 6328 \text{ \AA}$ , 定出  $F = 300 \text{ mm}$ ,  $R_1 = 3.8 \text{ mm}$ ,  $R_2 = 11.2 \text{ mm}$ ,  $d = 2.8 \text{ mm}$ 。故制成的全息图尺寸为  $7.4 \times 5.6 \text{ mm}^2$ 。图 7 是绘制的全息图之局部的放大图样。图 8 是所制成的全息图的费朗和费衍射图样及这一图样的理想形状。由图 8 可看出, 全息图的  $\pm 2$  阶频谱并未被完全抑制。

这是由于所用绘图仪的绘图质量不能保证全息图的条纹宽度完全遵守  $q = 1/2$ 。但仍可看出,  $\pm 3$  阶频谱确与  $\pm 1$  阶分离开来。

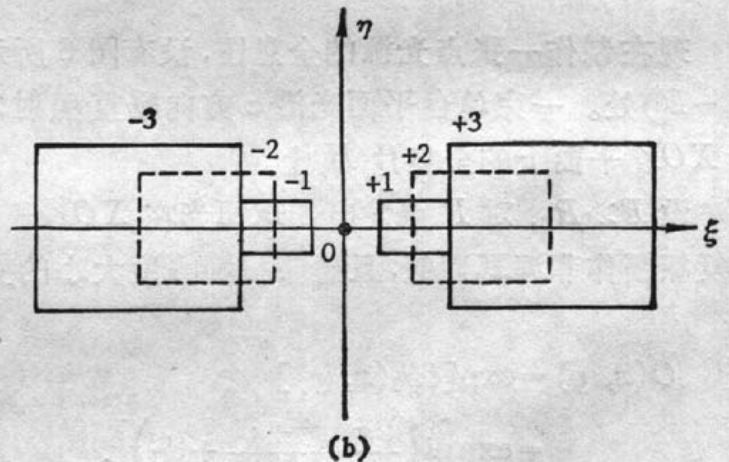
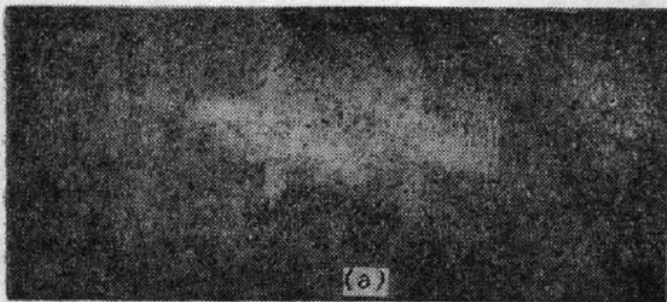


Fig. 8

- (a) The Fraunhofer diffraction pattern of the CGH produced;  
 (b) The ideal pattern of the Fourier spectrum of the CGH, predicted by the theory of this paper. The  $\pm 2$ nd orders should be depressed (disappear).

## 六、结 束 语

(1) 制作二值干涉计算全息图需要进行两种数字化。一种是对透过率函数值作二阶量化。另一种是对透过率函数的取值区间进行离散化, 即抽样。从本文的讨论可看出, 在一定条件下, 单做两种数字化的任一种都不会丢失信息。但同时进行两种数字化就引入了不能修正的误差。

(2) 前述的一些具体结果是将参考光看作平面光的假设下得出的。这是利用此时透射

光的频谱就是透过率频谱的平移。通过讨论透过率的频谱就可得出制作全息图应满足的若干要求。

(3) 本文只讨论了综合位相型光波的二值干涉图。李威汉提出以调制干涉型全息图上条纹宽度等方法来记录光波的振幅, 从而使二值干涉型全息图能综合一般的光波<sup>[8]</sup>。制作这样的全息图在绘图技术要求上比制作本文讨论的全息图复杂得多。

本文得到上海师大实验中心丁源副教授的指导, 在此表示感谢。

## Binary computer-generated interferogram

LIU XIANGDONG

(*Department of Computer Science, Shanghai Normal University, Shanghai 200234*)

(Received 9 January 1990; revised 18 April 1990)

### Abstract

Binary computer-generated interferogram—a kind of computer-generated hologram—is investigated. This kind of hologram is most suitable for synthesizing phase-only wavefront, so the discussion is within the synthesis of this kind of wavefront. The selection of object and reference waves the selection of sampling rate on the hologram are analysed. Corresponding results are presented in this paper.

**Key words:** OGH, Fourier spectrum.