第11卷 第2期
1991年2月

光学学报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 11, No. 2
February, 1991

激光频宽理论极限计算方法的讨论

严祖祺 阮可妃
(上海科学技术大学 物理系,上海 201800)

提 要

本文讨论了光强非均匀分布的单模激光腔的输出频宽的计算方法。并针对腔内光强分布的两种不同模型,分析了频宽修正因子。

关键词: 激光频宽

一、引 言

Schawlow、Townes[1]曾用噪声方法,首先导出了激光频宽的理论极限公式。之后Maitland[2]在他的专著中介绍了一种推导激光频宽流行公式的简洁方法。他利用激光谐振腔的品质因子和相干光净损耗功率 P_N 的概念,导出了计算激光频宽理论极限的基本关系式

$$\Delta\nu = P_N/2\pi U = P_s/2\pi U, \tag{1}$$

Maitland 还借用如下概念,"向激光腔内一个给定光模的受激发射速率与自发发射速率之比等于该模内的光子数 N"来计算腔内的自发发射功率 P_s,并导出了当前流行的激光频宽公式

$$\Delta\nu_0 = \frac{2\pi(\Delta\nu_c)^2 h\nu}{P_0}\left[1-\frac{g_m}{g_n}\frac{N_n}{N_m}\right]^{-1}。\tag{2}$$

值得指出,从理论角度来看 Schawlow 和 Maitland 所用的方法只适用于光强均匀分布的理想化激光器。实际激光器中,腔内光强的横向和纵向分布都是不均匀的。在这种情况下,(2)式的正确性有待进一步考察。

本文将在 Maitland 工作的基础上,进一步讨论光强非均匀分布的单模激光腔的输出频宽的计算方法和频宽修正因子等问题。

二、输出频宽的计算方法

作者认为,计算频宽理论极限的基本关系(1)式,对光强非均匀分布的激光器也是适用的。其原因是决定频宽 $\Delta\nu$ 的 P_s 和贮能 U 是激光腔的总体特性。(1)式的正确性不受腔内光强具体分布的影响。但是对光强非均匀分布的激光腔来说,其贮能 U 应按下式计算。

$$U = \int dz \iint P(r\theta z)\,ds = \frac{2n}{c}\int dz \iint I(r\theta z)\,ds, \tag{3}$$

腔内自发发射功率 P_s 也要按照自发跃迁理论和积分方法来计算。若设腔内介质原子是二能系统,腔内所有处于激发态 m 的原子自发发射频率为 $\nu\to\nu+d\nu$ 范围的光的总功率是

收稿日期: 1989年11月8日; 收到修改日期: 1990年9月19日

$$P_{TS}=h\nu A_{mn}F(\nu\nu_0)d\nu\int dZ\iint dsN(r\theta Z)。\tag{4}$$

如所周知，谐振腔内频率在 $\nu\rightarrow\nu+d\nu$ 范围内的光还可能有 $LS\dfrac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu$ 种不同的量子态。所以腔内激光物质因自发发射向某一特定量子态(光模)提供的功率

$$P_s=P_{TS}/SL\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu=\frac{c^3hF(\nu\nu_0)}{8\pi\nu LS}A_{mn}\int dZ\iint N_m(r\theta Z)ds,\tag{5}$$

式中 A_{mn} 是态 m 到态 n 的自发跃迁几率，N_m 是占有高能态 m 的原子数密度，$F(\nu\nu_0)$是相应的原子光谱加宽的分布函数。由(1)式、(3)式和(5)式可以原则上导出激光频宽理论极限公式。

三、激光输出频宽公式

为了采用易于测量的物理量来表达激光频宽公式，可以利用光放大和损耗规律以及腔的稳定工作条件来改写(5)式中的 $A_{mn}F(\nu\nu_0)$。如所周知[2]，因光放大而引起的光强增加率

$$\begin{aligned}\left(\frac{dI}{dt}\right)_i&=h\nu F(\nu\nu_0)B_{mn}\left(N_m-\frac{B_{nm}}{B_{mn}}N_n\right)I(r\theta Z)\\&=\frac{c^3}{8\pi\nu^2}A_{mn}F(\nu\nu_0)\left(N_m-\frac{g_m}{g_n}N_n\right)I(r\theta Z)。\end{aligned}\tag{6}$$

由贮能 U 和光强 $I(r\theta Z)$ 的关系式(3)可知，因光放大而引起的腔内贮能的增加率

$$\begin{aligned}\left(\frac{dU}{dt}\right)_i&=\frac{2n}{c}\int dZ\iint\left(\frac{dI}{dt}\right)_i dS\\&=\frac{nc^2}{4\pi\nu^2}A_{mn}F(\nu\nu_0)\int dZ\iint I(r\theta Z)\left(N_m-\frac{g_m}{g_n}N_n\right)dS。\end{aligned}\tag{7}$$

由腔的稳定工作条件可知，在单位时间内因光放大而增加的能量应等于经腔镜输出的功率 P_0，即

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_i=P_0。\tag{8}$$

对于激光腔来说，由于内部存在光的发射源，光的流动和输出不能看作纯粹光流的转移。尽管腔内光强的纵向分布并不均匀，但腔镜处的光强 $I\left(r\theta\dfrac{L}{2}\right)$也不会脉动。激光腔的输出功率 P_0 是由输出腔镜处的光强来决定的。在两腔镜对称的情况，腔的输出功率

$$P_0=2\alpha\iint I\left(r\theta\frac{L}{2}\right)dS,\tag{9}$$

式中 α 是腔镜的透射率。由(7)～(9)式可导出

$$A_{mn}F(\nu\nu_0)=\frac{8\pi\alpha\nu^2}{nc^2}\iint I\left(r\theta\frac{L}{2}\right)dS\Big/\int dZ\iint I(r\theta Z)\left(N_n-\frac{g_m}{g_n}N_m\right)dS。\tag{10}$$

将(10)式代入(5)式。并设腔内介质原子数的分布是均匀的话，N_m, N_n 都不随位置而变，则

$$P_s=\frac{\alpha ch\nu}{n\left(1-\dfrac{g_m}{g_n}N_n/N_m\right)}\iint I\left(r\theta\frac{L}{2}\right)dS\Big/\int dZ\iint I(r\theta Z)dS。\tag{11}$$

在此基础上可以导出激光腔的输出频宽

$$\Delta\nu=\frac{P_s}{2\pi U}=\frac{2\pi(\Delta\nu_c)^2h\nu}{P_0}\left[1-\frac{g_mN_n}{g_nN_m}\right]^{-1}\left[L\cdot\iint I\left(r\theta\frac{L}{2}\right)dS\Big/\int dZ\iint I(r\theta Z)dS\right]^2。\tag{12}$$

(12)式对任意的单模激光腔都成立，式中的 $I(r\theta Z)$ 是腔内的光强分布函数。对照(2)和(12)式可以看出，这里导出的频宽表示式是不同于 Schawlow、Maitland 等人引证的频宽 $\Delta\nu_0$，须附加上一个修正因了

四、TEM$_{00}$ 基模激光频宽计算问题的讨论

对于光强均匀分布的激光腔来说，(12)式中的修正因子是 1，(12)式可简化为(2)式。现在针对图 1 所示的光强非均匀分布的 TEM$_{00}$ 模的园柱形激光腔来考察激光频宽的修正问题。由(12)式可知，修正因子和腔内光强的具体分布形式有关。这里采用以下两种模型来分析。

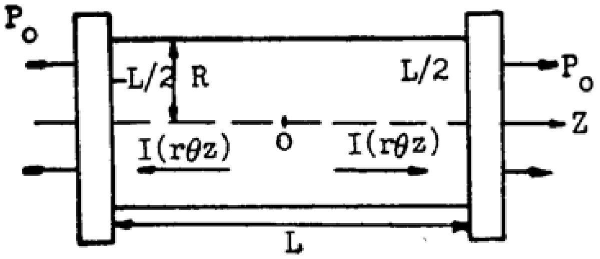

Fig. 1

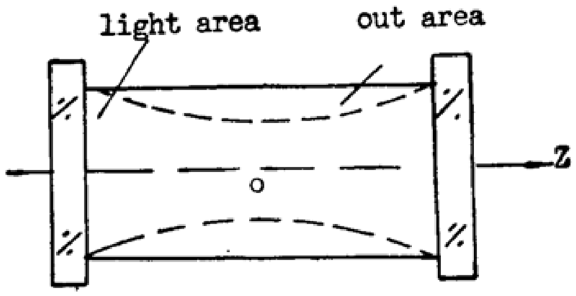

Fig. 2

第一种模型认为。腔内光流束缚在受有限反射镜制约的包络面内，如图 2 所示。包络面之内光强 $I(r\theta Z)$ 呈高斯型分布，包络面之外的腔区中光强为零，即

$$\begin{cases}I(r\theta Z)=\dfrac{I_0}{1+4Z^2/K^2\omega_0^4}\exp[-2r^2/\omega_0^2(1+4Z^2/K^2\omega_0^4)] \quad (\text{包络面之内})\\ I(r\theta Z)=0 \quad (\text{包络面之外})\end{cases}\tag{13}$$

按此模型，(12)式中的积分因子 $\iint I(r\theta Z)dS$ 相当于腔中通过包络面内部区域任一横截面光流功率。鉴于(13)式中包络面内部区域的光强 $I(r\theta Z)$ 是一致于无源谐振腔的 TEM$_{00}$ 模的光强，因此可以认为光流通过包络面内部任一横截面的功率 $\iint I(r\theta Z)dS$ 是相同的。这样(12)式中的修正因子

$$\left[L\cdot\iint I\left(r\theta\frac{L}{2}\right)dS\Big/\int dZ\iint I(r\theta Z)dS\right]^2=1,$$

单模激光频宽式(12)将一致于(2)式。由此推知，在这种模型下，Schawlow，Maitland 等人导出的频宽公式(2)式也适用于单模激光腔。

第二种模型认为，在稳定的有源基模激光腔中，由于激光介质的作用，腔内光强呈高斯型分布；在腔外光强为零(无激光介质)，其数学形式是

$$\begin{cases} I(r\theta Z)=\dfrac{I_0}{1+4Z^2/K^2\omega_0^4}\exp[-2r^2/(1+4Z^2/K^2\omega_0^4)] \quad (\text{腔内}) \\ I(r\theta Z)=0 \quad (\text{腔外}) \end{cases} \tag{14}$$

式中 K 是光的波数，$K=2\pi/\lambda$，ω_0 是腔内光束腰部的宽度，I_0 是腔轴中心处的光强。当腔的菲涅耳数 $R^2/L\lambda$ 较大时，$\omega_0\doteq\sqrt{L\lambda/2\pi}$[3]。于是腔内光强分布是

$$I(r\theta Z)=\frac{I_0}{1+4Z^2/L^2}\exp[-4\pi r^2/L\lambda(1+4Z^2/L^2)]。\quad (\text{腔内}) \tag{15}$$

下面将采用这种模型来计算 TEM_{00} 单模激光的频宽，并讨论频宽修正的有关特性。将(15)式的 $I(r\theta Z)$ 代入普遍公式(12)式，可导出基模激光频宽

$$\begin{aligned} \Delta\nu &= \frac{2\pi(\Delta\nu_c)^2 h\nu}{P_0}\left[1-\frac{g_mN_n}{g_nN_m}\right]^{-1} \\ &\quad\cdot\left[L\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R I\left(r\theta\frac{L}{2}\right)rdr\Big/\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dZ\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R I(r\theta Z)\cdot rdr\right]^2 \\ &= \frac{2\pi(\Delta\nu_c)^2 h\nu}{P_0}\left[1-\frac{g_mN_n}{g_nN_m}\right]^{-1} \\ &\quad\cdot\left[L\left(1-e^{-2\pi R^2/L\lambda}\right)\Big/\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}dz\left(1-e^{-4\pi R^2/L\lambda(1+\frac{4z^2}{L^2})}\right)\right]^2。 \end{aligned} \tag{16}$$

若取激光腔的腔长 $L=1\,\mathrm{m}$，截面半径 $R=10^{-3}\,\mathrm{m}$ 激光波长 $\lambda=2\times10^{-6}\,\mathrm{m}$，经数值计算可得该腔的输出频宽

$$\Delta\nu=0.937\ \frac{2\pi(\Delta\nu_c)^2h\nu}{P_0}\left[1-\frac{g_mN_n}{g_nN_m}\right]^{-1}=0.937\Delta\nu_0 \tag{17}$$

由此可知，两种不同光强分布模型所导出的 TEM_{00} 单模激光频宽的结果是不同的。在第一种模型中，光强不均匀分布对频宽 $\Delta\nu$ 没有实质性的修正。在第二种模型中，光强不均匀分布对频宽的修正是实在的。哪一种模型更接近于客观实际，有待进一步研究和讨论。

五、频宽修正有关特性的讨论

按照上面提到的第二种模型，可以认为腔内光强是按高斯函数在腔内连续分布，腔内并不存在光强实变的包络面，其频宽由(16)式来定。在此情况下，作者还可引伸出有关频宽修正的两点推论。

第一，经作者计算(按(16)式)发现，TEM_{00} 单模激光的频宽 $\Delta\nu$ 将随着激光波长 λ 的增加而显著地偏离(2)式所表示的 $\Delta\nu_0$。对于长波段红外激光器来说，光强分布的不均匀性会显著影响激光频宽。对于 λ 较小的紫外激光腔来说，频宽 $\Delta\nu$ 接近于 $\Delta\nu_0$。其物理原因是频宽修正因子决定于光强的纵向分布[4]；对短波长激光来说光强的纵向分布几乎是均匀的；对 λ 很大的长波段激光腔来说。光强的纵向分布是显著不均匀的。

第二，TEM_{00} 单模激光频宽的修正因子总是小于 1，即 $\Delta\nu<\Delta\nu_0$。从(15)式可知：在 $r\to0$ 的腔轴附近(光强较强处)，输出腔镜所在处$\left(r=0,\ Z=\pm\dfrac{L}{2}\right)$的光强几乎只是腔中心处($Z=0,\ r=0$)的一半。进一步计算可知输出腔镜处腔的光流功率 $P(Z)|_{z=\pm\frac{L}{2}}$ 是小于腔中心截面的光流功率 $P(Z)|_{Z=0}$。于是出现了小于 1 的修正因子。

参 考 文 献

[1] A. L. Schawlow, C. H. Townes; *Phys. Rev.*, 1958, **112**, 1940.
[2] A. Maitland;《激光物理》(国防工业出版社,北京,1979)27, 101, 197.
[3] 固体激光导论编写组;《固体激光导论》(上海人民出版社,1975)201~205, 307.
[4] 严祖祺;《激光》,1982, **9**, No. 8(Hug), 493~495.

Discussion of calculating method for theoretical limit of laser linewidth

YAN ZUQI AND RUAN KEFEI
(*Department of Physics, Shanghai University of Science and Technology, Shanghai* 201800)

(Received 8 November 1989; revised 19 September 1990)

Abstract

This paper discusses the calculating method for theoretical limit of laser linewidth in the single mode laser cavity in which the distribution of light intensity is nonuniform. Authors analyse the revision factor of linewidth for two different models of light intensity distribution.

Key words: laser linewidth