

# 多层介质波导的一种新方法及其在非均匀介质平面光波导中的应用

王子华 王 旭

(上海科技大学光纤与现代通讯研究所, 上海 201800)

## 提 要

本文提出求解多层介质平面光波导的一个简单而直接的方法。将其应用于非均匀平面光波导, 可以求解任意折射率分布和 TM 模问题。以抛物线型和指数型分布为例, 说明只要分层数目足够多, 本文介绍的方法可以达到任意精度。

关键词: 平面光波导, 非均匀平面光波导。

解多层介质平面光波导问题有特征方程法<sup>[1]</sup>、等效传输线的横向谐振法<sup>[2]</sup>等, 它们只适用于层数少的情况, 所以最常用的还是矩阵方法<sup>[3,4]</sup>。一般的矩阵方法需要计算机运算量大, 收敛速度慢, 而且复杂程度随着层数的增加而增加。本文提出求解多层介质波导的一个新方法, 它基于一个简单的循环公式, 将多层介质波导的特征方程表示成与三层介质波导一样的简洁形式, 由于该循环公式及其导数公式具有解析表达式, 所以可用牛顿迭代法求根, 因而收敛速度极快。用多层分割法求解非均匀介质平面光波导时, 本方法的优越性更为明显。

## 二、多层介质平面光波导

多层介质平面波导结构如图 1 所示。若将坐标轴置于介电常数为  $\epsilon_{f,0}$  一层中, 其上有

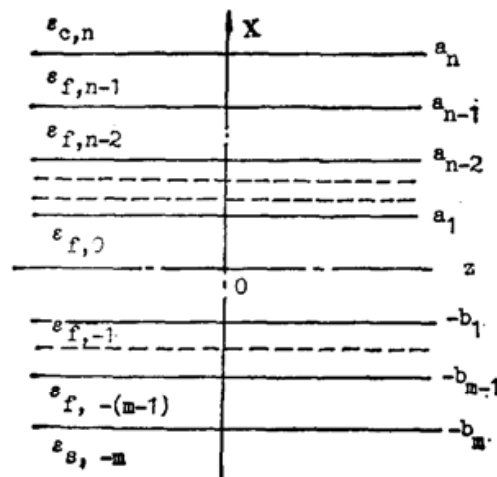


Fig. 1 Geometry of a multilayer dielectric planar optical waveguide

$n$  层, 其下有  $m$  层。在这多层介质中导引的波在最外两层中是沿  $x$  方向指数衰减的。由于波导在  $y$  方向是均匀的, 这是一个二维问题  $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0\right)^*$ 。首先考虑 TE 模, 它有  $E_y$ ,  $H_x$  和  $H_z$  三个分量, 满足 Maxwell 方程

$$i\omega H_x(x, z) = -\frac{\partial}{\partial z} E_y(x, z), \quad (1)$$

$$i\omega H_z(x, z) = \frac{\partial}{\partial x} E_y(x, z), \quad (2)$$

$$-i\omega \varepsilon_v E_y(x, z) = \frac{\partial}{\partial z} H_x(x, z) - \frac{\partial}{\partial x} H_z(x, z), \quad (3)$$

$$\varepsilon_v = \begin{cases} \varepsilon_{c,n}, & x > a_n \\ \varepsilon_{f,j}, & a_{j+1} > x > a_j, \quad (j=1, 2, 3, \dots, n-1) \\ \varepsilon_{f,0}, & a_1 > x > -b_1 \\ \varepsilon_{f,-j}, & -b_j > x > -b_{j+1}, \quad (j=1, 2, \dots, m-1) \\ \varepsilon_{s,-m}, & -b_m > x \end{cases} \quad (4)$$

将 (1) 式和 (2) 式代入 (3) 式得到波动方程

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_v \right] E_y(x, z) = 0, \quad (5)$$

方程 (5) 的解为  $E_y(x, z) = E_y(x) \exp(j\beta z)$ , 其中  $\beta$  为纵向传播常数, 且

$$E_y(x) = \begin{cases} D_n \cdot \exp[-\alpha_{c,n}(x-a_n)], & x > a_n \\ D_j \cdot \exp[ik_{f,j}(x-a_j)] + E_j \cdot \exp[-ik_{f,j}(x-a_{j+1})], & a_{j+1} > x > a_j, \quad j=1, 2, \dots, (n-1) \\ G_0 \cdot \exp[ik_{f,0}(x+b_1)] + E_0 \cdot \exp[-ik_{f,0}(x-a_1)], & a_1 > x > -b_1 \\ F_j \cdot \exp[-ik_{f,-j}(x+b_j)] + G_j \cdot \exp[ik_{f,-j}(x+b_{j+1})], & -b_j > x > -b_{j+1}, \quad j=1, 2, \dots, (m-1) \\ F_m \cdot \exp[\alpha_{s,-m}(x+b_m)], & x < -b_m \end{cases} \quad (6)$$

$$\alpha_v = (\beta^2 - \omega^2 \varepsilon_v)^{1/2}, \quad v=c, n; s, -m, \quad (7)$$

$$k_{f,l} = (\omega^2 \varepsilon_{f,l} - \beta^2)^{1/2}, \quad (8)$$

$$l = (n-1), (n-2), \dots, 1, 0, -1, \dots, -(m-1).$$

在边界  $x = a_n, a_{n-1}, \dots, a_1$  处, 应用切向分量  $E_y$  和  $H_x$  连续的边界条件得到

$$\begin{cases} \frac{\exp[ik_{f,(j-1)}(a_j - a_{j-1})] + E_{j-1}/D_{j-1}}{\exp[ik_{f,(j-1)}(a_j - a_{j-1})] - E_{j-1}/D_{j-1}} = \frac{1}{i \tan \Phi_{c,j}}, \\ j=2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \frac{\exp[ik_{f,0}(a_1 + b_1)] + E_0/G_0}{\exp[ik_{f,0}(a_1 + b_1)] - E_0/G_0} = \frac{1}{i \tan \Phi_{c,1}}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\tan \Phi_{c,n} = \alpha_{c,n}/k_{f,(n-1)} \quad (11)$$

$$\tan \Phi_{c,j} = \tan \varphi_{c,j} \cdot \tan[-k_{f,j}(a_{j+1} - a_j) + \Phi_{c,j+1}] \quad (12)$$

$$j=1, 2, \dots, (n-1)$$

$$\tan \varphi_{c,j} = k_{f,j}/k_{f,(j-1)}, \quad j=1, 2, \dots, (n-1) \quad (13)$$

\* 为简单起见, 令  $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ , 时谐因子为  $\exp(-i\omega t)$ 。

(10)式可写成

$$E_0/G_0 = \exp\{i[k_{f,0}(a_1+b_1) - 2\Phi_{c,1}]\} \quad (14)$$

同样在边界  $x = -b_m, -b_{m-1}, \dots, -b_2, -b_1$  处, 应用切向分量  $E_y$  和  $H_z$  连续的边界条件, 可以得到

$$G_0/E_0 = \exp\{i[k_{f,0}(a_1+b_1) - 2\Phi_{s,-1}]\} \quad (15)$$

式中  $\Phi_{s,-1}$  由下面的循环公式求得

$$\tan \Phi_{s,-j} = \tan \varphi_{s,-j} \cdot \tan[-k_{f,-j}(b_{j+1}-b_j) + \Phi_{s,-(j+1)}] \quad (16)$$

$$j = 1, 2, \dots, (m-1)$$

$$\tan \Phi_{s,-m} = \alpha_{s,-m}/k_{f,-(m-1)} \quad (17)$$

式中

$$\tan \varphi_{s,-j} = k_{f,-j}/k_{f,-(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, (m-1) \quad (18)$$

由(14)式和(15)式得到多层介质波导的特征方程为:

$$k_{f,0}(a_1+b_1) - \Phi_{c,1} - \Phi_{s,-1} - p\pi = 0 \quad (p=0, 1, 2, \dots) \quad (19)$$

(19)式与一个三层介质波导的特征方程在形式上是一样的。

用牛顿迭代法求特征方程(19)式的根, 迭代公式为:

$$\beta_i = \beta_{i-1} - D(\beta_{i-1})/D'(\beta_{i-1}) \quad i = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

$$D(\beta) = k_{f,0}(a_1+b_1) - \Phi_{c,1} - \Phi_{s,-1} - p\pi \quad (21)$$

$$D'(\beta) = -\left[\frac{\beta}{k_{f,0}}(a_1+b_1) + \Phi'_{c,1} + \Phi'_{s,-1}\right] \quad (22)$$

式中  $\Phi'_{c,1}$  由下面的循环公式求得:

$$\begin{aligned} (\Phi_{c,j})' = & \cos \Phi_{c,j} \cdot \left\{ \beta \cdot \left( \frac{1}{k_{f,j-1}^2} - \frac{1}{k_{f,j}^2} \right) \cdot \tan \Phi_{c,j} + (\tan^2 \varphi_{c,j} + \tan^2 \Phi_{c,j}) \right. \\ & \left. \cdot \frac{1}{\tan \varphi_{c,j}} \cdot \left[ -\frac{\beta}{k_{f,j}}(a_{j+1}-a_j) + (\Phi_{c,j+1})' \right] \right\} \quad (j=1, 2, \dots, n-1) \quad (23) \end{aligned}$$

对(16)式求导也可得到与(23)式形式一样的  $\Phi'_{s,-j}$  的循环公式。  $D(\beta)$  由(21)式给出, 其中  $\Phi_{c,1}$  和  $\Phi_{s,-1}$  由循环公式(12)和(16)式求得。

当传播常数  $\beta > \omega^2 \varepsilon_{f,l}$  ( $l = n-1, \dots, 1, 0, -1, \dots, -(m-1)$ ) 中任意一个或几个即波在这些层中是迅衰波 ( $k_{f,l}$  为虚数) 时, 或介质有损耗 ( $k_{f,l}$  和  $\beta$  为复数) 时, 同样可以用本文方法求解, 只要将变量范围扩展到复数域就行了。对于 TM 模, 本文方法也同样适用, 只要将(11)、(13)、(17)和(18)式作相应的改变

$$\tan \Phi_{c,n} = \varepsilon_{f,(n-1)} \alpha_{c,n} / \varepsilon_{c,n} k_{f,(n-1)} \quad (11')$$

$$\tan \varphi_{c,j} = \varepsilon_{f,(j-1)} k_{f,j} / \varepsilon_{f,j} k_{f,(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, (n-1) \quad (13')$$

$$\tan \Phi_{s,-m} = \varepsilon_{f,-(m-1)} \alpha_{s,-m} / \varepsilon_{s,-m} k_{f,-(m-1)} \quad (17')$$

$$\tan \varphi_{s,-j} = \varepsilon_{f,-(j-1)} k_{f,-j} / \varepsilon_{f,-j} k_{f,-(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, (m-1) \quad (18')$$

就行了。

本文方法的优点是: (1) 表达式和计算机程序都很简单; (2) 用牛顿迭代法求解, 收敛非常快, 一般只要迭代三至四次就可得到高精度的解。迭代初始值的选取较随意, 初始值选取不当只增加一、二次迭代运算而已; (3) 不论介质层数多少, 不论 TE 模还是 TM 模, 特征方程表达式及计算机程序是一样的。

### 三、非均匀介质平面光波导

非均匀折射率分布的介质平面光波导,只要将它分成许多层,每一层的折射率近似为均匀的,都可以用上述方法求解。为了说明这一方法的有效性及其精确程度,我们举两个实例。

#### 1. 抛物线型分布

考虑非均匀平面光波导沿  $x$  方向的折射率分布为

$$n^2(x) = n_1^2(1 - x^2/x_0^2), \quad (24)$$

式中  $n_1 = 1.5$ ,  $x_0 = 20 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 0.83 \mu\text{m}$ 。这是一种理想情况,即不考虑衬底介质的影响,假设  $n^2(x)$  的分布伸展到无穷,其精确解由文献[2]中式(2-70)求得。

采取多层分割法,用本文求解多层平面光波导的方法计算  $\text{TE}_0$  模  $\beta$  值以及精确解都列于表 1。在本文的计算中,将折射率分布在  $|x| = 20 \mu\text{m}$  处截断,由表 1 可见,这样的近似并没带来多大的误差。将波导分成 20 层时, $\beta$  的计算精度已经达到 0.2%,层数增加,精度提高。 $\text{TM}_0$  模的计算结果与表 1  $\text{TE}_0$  模的结果十分符合。

Table 1 Comparison of the calculated  $\beta$  with the exact value for the parabolic profile

Number of layers	Thickness of each layer ( $\mu\text{m}$ )	$\beta$ for $\text{TE}_0$ mode ( $1/\mu\text{m}$ )	
		Present method	Exact value
20	0.2	11.3061	11.3301
30	0.13	11.3245	
50	0.08	11.3301	

#### 2. 指数型分布

考虑非均匀平面光波导沿  $x$  方向的折射率分布为

$$n^2(x) = n_0^2 + 2n_0 \cdot \Delta n \cdot \exp(-|x|/d), \quad (25)$$

式中  $n_0 = 2.177$ ,  $\Delta n = 0.043$ ,  $d = 0.931 \mu\text{m}$ ,  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ 。这也是一种理想情况,假设  $n^2(x)$  分布伸展到无穷,精确解由文献[2](2-82)式给出。用本文方法计算  $\text{TE}_0$  模  $\beta$  及与精确解的比较示于表 2,计算中将折射率分布在  $|x| = 10 \mu\text{m}$  处截断,当  $|x| > 10 \mu\text{m}$  时,令  $n(x) = n_0$ 。

Table 2 Comparison of the calculated  $\beta$  with the exact value for the exponential profile

Number of layers	Thickness of each layer ( $\mu\text{m}$ )	$\beta$ for $\text{TE}_0$ mode ( $1/\mu\text{m}$ )	
		Present method	Exact value
20	0.5	21.6714	21.6158
50	0.2	21.6201	
80	0.125	21.6158	

### 参 考 文 献

- [2] 叶培大, 吴彝尊; 《光波导技术基础理论》, (人民邮电出版社, 1981), 106.  
[3] J. Chilwell, I. Hodgkinson; *J. O. S. A. (A)*, 1984, **1**, No. 7 (Jul), 742~753.  
[4] L. M. Walpit; *J. O. S. A. (A)*, 1985, **2**, No. 4 (Apr), 595~602.

## **A new method for solving multilayer dielectric waveguide and its application to non-uniform dielectric waveguide**

WANG ZIHUA AND WANG XU

(*Shanghai University of Science & Technology, Shanghai 201800*)

(Received 11 January 1991; revised 6 May 1991)

### **Abstract**

In this paper, we present a new direct method for solving the problem of a multilayer dielectric planar waveguide. Applying this method to a non-uniform dielectric planar waveguide, we can solve the problems of an arbitrarily graded planar waveguide for either TE or TM modes. Taking parabolic and exponential refractive index profiles as two examples, we have shown that high accuracy can be obtained by using this method provided that the waveguide can be divided into proper number and thickness of layers.

**Key words:** planar optical waveguide, non-uniform planar optical waveguide.