第11卷 第11期
1991年10月

光学学报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 11, No. 11
November, 1991

用时域 $ABCD$ 矩阵元表达的时间菲涅耳数

张筑虹　范滇元
(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

提　　要

利用时域 $ABCD$ 矩阵引入过程中给出的与 $ABCD$ 矩阵的类比关系，给出了对光脉冲传输的基本时间特征(脉冲形状、宽度和啁啾行为)可作出定性或半定量分析的时间菲涅耳数，引入了有效传输时间的概念，讨论了几种特例。

关键词：$ABCD$ 矩阵，时间菲涅耳数。

一、引　言

菲涅耳数是衍射系统的重要物理量。从菲涅耳数的大小，可以对衍射场的基本特征作出定性或半定量的分析。文献[1]中用光线矩阵元给出了复杂光学系统的菲涅耳数的简洁表示，引入了可定量反映光学系统对光束衍射影响的有效传输距离的概念，具有较大的普遍性。

时域 $ABCD$ 矩阵是基于时域色散脉冲传输与空间衍射的相似[2]，利用空间-时间类比[3]引入的，近年来被用于色散脉冲传输[4]，含色散元的超短脉冲激光设计[5]等方面的分析。本文通过空间-时间类比，引入了时间菲涅耳数和有效传输时间的概念。对几种特例的讨论表明，时间菲涅耳数和有效传输时间可以对光脉冲传输的基本特征作出定性或半定量的分析。

二、时域 $ABCD$ 矩阵

考察在两维(x, z)空间沿 z 方向传播的慢衍射单色波，

$$E(x, t)=\mathrm{Re}(u(x, z)\exp[i(\omega t-kz)]) \tag{1}$$

其中，$k=\omega n/c$，n 为传播媒质的折射率。遵从共轴波动方程

$$i\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x^2}=-2k\frac{\partial u}{\partial z}, \tag{2}$$

方程解为 Hermite-Gaussian 空间模，基模为

$$\left.\begin{aligned} u(x, z)&=\frac{K}{\sqrt{q}}\exp(-ikx^2/2q), \\ q&=q_0+z,\ q_0=i(\pi W_0^2/\lambda)。\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

收稿日期：1991年1月22日，收到修改稿日期：1991年3月6日

式中，W_0 为高斯基模的腰斑半径。经共轴光学系统传输的光束可用下式给出

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dz} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \dfrac{dx_1}{dz} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

表示为 $ABCD$ 定律

$$q_2=\frac{Aq_1+B}{Cq_2+D}。 \tag{5}$$

考察由下式给出的行波脉冲

$$E(z,\ t)=\mathrm{Re}[A(z,\ t)\exp(i(\omega_0 t-k_0 z)], \tag{6}$$

其传输行为由色散波方程描述

$$\left[\frac{\partial}{\partial z}+k'(\omega_0)\ \frac{\partial}{\partial t}\right]A(z,\ t)=\frac{1}{2}ik''(\omega_0)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ A(z,\ t)。 \tag{7}$$

作变量代换:

$$\tau=t-k'(\omega_0)z=t-\frac{z}{v_g}, \tag{8}$$

$$\eta=\omega_0 k'' z。 \tag{9}$$

代入(7)式得到

$$i\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2}=2\omega_0\ \frac{\partial A}{\partial \eta}, \tag{10}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned} &A(z,\ t)=\frac{A_0}{\sqrt{P}}\exp(i\omega_0\tau^2/2P), \\ &P=P_0+\eta,\ P_0=-i\omega_0 T_0^2/2。\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中 T_0 为高斯光脉冲的变换极限宽度。光脉冲的传输可由时间光线和时域 $ABCD$ 矩阵给出

$$\begin{pmatrix} \tau_2 \\ \dfrac{d\tau_2}{d\eta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \dfrac{d\tau_1}{d\eta} \end{pmatrix}。 \tag{12}$$

时域 $ABCD$ 定律为

$$P_2=\frac{AP_1+B}{CP_1+D}。 \tag{13}$$

以上讨论清楚地给出时空类比有以下对应关系

$$\left.\begin{aligned} &\eta=\omega_0 k'' z \leftrightarrow z, \quad \tau=t-k'z \leftrightarrow x, \\ &\omega_0 \leftrightarrow -k, \quad \Omega=\omega-\omega_0 \leftrightarrow -k_x。\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

k_x 为单色光波的横向空间频率。

三、时间菲涅耳数

1. 空间硬边光阑(圆孔)的菲涅耳数是熟知的,

$$N=a^2/\lambda L, \tag{15}$$

式中 a 是入射面光阑的半径，L 是轴上观察点到孔面的距离。

由类比关系(14)式 以时间半宽度为 T 的斩波完成的连续光取䊝的时间菲涅耳数为

$$N_t=-\frac{CT^2}{4\lambda\eta} \tag{16}$$

2．对于非匀幅波 $\psi(r)$，可以看成是一个匀幅波 ψ_0 通过位于入射光阑面的透过率为 $T(r)$ 的光阑而形成的，它的矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{F} & 1 \end{pmatrix}。$$

对球面波有 $F=-R$，对于高斯光束 $\psi(r)=\psi_0\exp(-r^2/w^2)$ 有 $F=ikw^2/2$。若传输系统本身的光线矩阵为 $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$ 则总光线矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_0-(B_0/F) & B_0 \\ C_0-(D_0/F) & D_0 \end{pmatrix}。 \tag{17}$$

菲涅耳数为

$$N=\frac{a^2}{\lambda}\frac{A}{B}=\frac{a^2}{\lambda}\left(\frac{A_0}{B_0}-\frac{1}{F}\right), \tag{18}$$

利用对应关系(14)式 有时间菲涅耳数

$$N_t=-\frac{CT^2}{\lambda}\frac{A}{B}=-\frac{CT^2}{\lambda}\left(\frac{A_0}{B_0}-\frac{1}{F}\right)。 \tag{19}$$

对于高斯型光脉冲，如其进入色散介质时宽度为 T'，则有

$$F=-iw_0T'^2/2,\ N_t=-\frac{CT^2}{\lambda}\frac{A_0}{B_0}+i\frac{T^2}{\pi T'^2}。 \tag{20}$$

定义有效传输时间 T_{eff} 为

$$T_{eff}=B/A, \tag{21}$$

由式(15)、(16)、(19)可知，其具有类有效传输距离的物理意义，是描述时间衍射的量。

四、讨　　论

1．光冲脉在自由空间的传输

在(7)式中，k'' 是表征介质群速度色散的物理量，在自由空间，$k''=0$，因而有 $\eta=0$，其传输矩阵

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。 \tag{22}$$

由此，时间菲涅耳数 $N_t\to\infty$，有效传输时间 $T_{eff}=0$，所表征的物理意义是光脉冲在传播过程中不发生任何变代，虽有实际传播时间，却有效传输时间为零。

2．光脉冲在色散介质中传输

光脉冲在色散介质中的时间 $ABCD$ 传输矩阵

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_0 k'' z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}。 \tag{23}$$

由式(12)、(13)有

$$\tau_2 = \tau_1 + \omega_0 k'' z \frac{d\tau_1}{d\eta}, \quad \frac{d\tau_2}{d\eta} = \frac{d\tau_1}{d\eta}。 \tag{24}$$

色散系统的有效传输时间 $T_{eff} = \frac{B_0}{A_0} = \omega_0 k'' z$, 从上式明显看出, 脉冲发生展宽(或压缩), 而啁啾行为不变。且 z 一定时, T_{eff} 的大小反映色散强弱。

对高斯光脉冲, 当 $T^2/T'^4 \ll 1$ 时, 相当于连续波经斩波后的传输; $T'/T'^2 \gg 1$ 时, 近似于高斯光脉冲在色散介质中自由传输, 发生展宽或压缩, 而啁啾行为不变。

3. 光脉冲在纯相位调制介质中传输

文献[5]中给出的 $ABCD$ 矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pm\frac{1}{\Delta\tau_\phi^2} & 1 \end{pmatrix}。 \tag{25}$$

式中 $\Delta\tau_\phi$ 为调制产生的每一弧度的二阶相位变代的时间, 很明显, 该系统有 $T_{eff}=0$, 即脉冲将不发生展宽或压缩。同样, 系统的 $N_t \to \infty$, 由(12)、(13)式可得

$$\tau_2 = \tau_1, \quad \frac{d\tau_2}{d\eta} = \frac{d\tau_1}{d\eta} \pm \frac{\tau_1}{\Delta\tau_\phi^2}。 \tag{26}$$

即脉冲的啁啾行为发生变化。

4. 光脉冲在光纤中传输的孤子效应

光在光纤中传输时, 将同时受到自相位调制和群速度色散的影响, 用文献[6]的处理方法, 对于薛定锷方程的一、二、三阶孤子解为

$$E(t) = A\left(\frac{\lambda}{2z_0 n_2}\right)^{1/2} \operatorname{sech}(t/t_0), \tag{27}$$

式中, 孤子周期 $z_0 = 0.322\,\frac{\pi^2 C^2 T'^2}{D(\lambda)\lambda_0}$, $T'^2 = 1.76 t_0$, 给出

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & \omega_0 k''\cdot dz \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2k_0\cdot dz\cdot n_2\cdot I_0}{T'^2} & 1 \end{pmatrix}\right]^M$$

式中 $M\cdot dz = z_0$。

计算表明, 在负色散介质中, $z=z_0$ 时, 有 $T_{eff}=0$, 这意味着在 $z=z_0$ 处, 入射光脉冲将不失真地重现, 即光纤的孤子效应。

五、结 论

以时域 $ABCD$ 矩阵表达的时间菲涅耳数和有效传输时间可以定性或半定量地分析光脉冲传输过程中的基本时间特征的变代。正如在空间衍射系统中利用菲涅耳数分析观察面上光衍射分布, 选择适当接受面位置或用软边光阑的技术获得均匀光斑, 时间菲涅耳数将对如何在高功率激光系统获取高信噪比光脉冲, 如何利用 CPA 技术, 如何分析脉冲在传播过

程中某一时刻的特性起到一定的指导作用。

参 考 文 献

[1] 范滇元;《光学学报》, 1983, **3**, No. 4 (Apr), 319。
[2] A. Siegman; 《*Laser*》, (Orford: The University Science, Pr. 1986) ch. 9.
[3] S. A. Arhonov, A. P. Sukhorov *et al*; *Sov. Phys. JETP*, 1969, **28**, No. 4 (Apr), 748.
[4] S. P. Dijeili, A. Dienes *et al.*; *IEEE J. Q. E.*, 1990, **QE-26**, No. 6 (Jun), 1158.
[5] A. Caprara; *Proc. SPIE*, 1990, Vol. 1229, 48.
[6] 章若冰, 张立原等;《光学学报》, 1989, **9**, No. 7 (Jul), 646。

The temporal Fresnel number in terms of ray matrix elements

ZHANG ZHUHONG AND FAN DIANYUAN

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Shanghai* 201800)

(Received 22 Januaay 1991; revised 6 March 1991)

Abstract

By using the analogy between temporal ray matrix and the woll known ray matrix, the temporal Fresnal number, which gives the qualitative and quasiquantitative characteristics (shape, width and chirp) of optical pulses, is derived. A concept of "effective propagation time" is introduced. Several typical examples are discussed.

Key words: *ABCD* matrix; temporal Fresnel number.