

# 振幅起伏对自适应光学系统的限制

冯岳忠 龚知本 宋正方

(中国科学院安徽光学精密机械研究所, 合肥 230031)

## 提 要

本文讨论了补偿前以及经柔形镜对位相畸变完全校正后的光强分布和斯特列尔比, 分析了振幅起伏对自适应光学技术的基本限制。结果表明: 振幅起伏的影响最严重时补偿后的中心光强仅为衍射极限的一半, 斯特列尔比的极限值在最低时为 0.5。

关键词: 振幅起伏, 自适应光学, 柔形镜。

## 一、引 言

大气湍流效应严重影响着激光束在大气中的传输。相干光学自适应技术(COAT)的应用则有可能使大气湍流的影响得到补偿和校正<sup>[1,2]</sup>。起初人们对此寄以很大希望, 但是实践证明 COAT 难以全部补偿大气湍流的影响, 这是因为大气湍流对光波的影响包括二部分, 一是光束波前的位相畸变, 另一是波前光场的振幅起伏, 而自适应光学位相补偿技术只能补偿位相畸变, 不能补偿振幅起伏。因此当位相畸变被完全校正——即柔形镜校正后, 振幅起伏便成了自适应光学用于补偿大气湍流效应的基本限制。虽然一些学者<sup>[3,4]</sup>已认识到了这种限制, 但他们还只考虑了弱起伏区的情形, 对于强起伏区内振幅起伏的限制情形如何目前尚不清楚。本文基于文献 [5] 对强起伏区内振幅起伏的研究结果, 将从光强分布和斯特列尔比二个方面讨论整个起伏区内振幅起伏的限制。

## 二、光 强 分 布

光束通过大气传输后, 其截面上的光强分布是随机的, 即使有自适应光学系统校正, 实际的光强分布还是随机的, 只是这种随机性减弱了。根据推广的惠更斯-菲涅耳原理<sup>[6]</sup>, 可以求得光束在湍流大气中传播时其截面上的平均光强分布。

图 1 是自适应光学系统示意图。信标光源位于发射对称轴上距发射平面  $L$  远处。对于初始发射场  $u_0(\rho)$ , 在没有使用自适应光学补偿(即开环)时经过大气传输  $L$  距离后的光场分布为

$$u_N(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i L} \iint d^2\rho u_0(\rho) \exp\left[\frac{i k}{2L}(\mathbf{r}-\rho)^2\right] \times \exp[\chi(\mathbf{r}, \rho) + iS(\mathbf{r}, \rho)], \quad (1)$$

式(1)中  $\chi(\mathbf{r}, \rho) + iS(\mathbf{r}, \rho)$  表示位于发射平面上  $(0, \rho)$  点的球

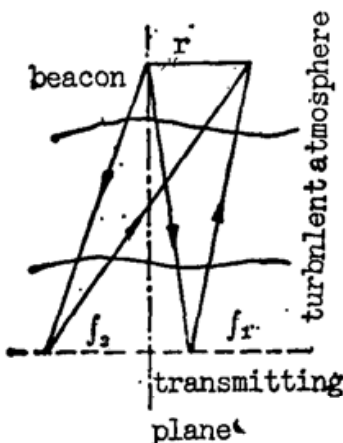


Fig. 1 Sketch of adaptive system

面波经湍流大气传输到  $(L, \mathbf{r})$  点时光场的复位相扰动,  $k = 2\pi/\lambda$  是波数,  $\lambda$  是光波波长。由式(1)可得到平均光强为

$$\langle I_N(\mathbf{r}) \rangle = \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 u_0(\rho_1) u_0^*(\rho_2) \exp \left[ \frac{ik}{2L} [(\mathbf{r} - \rho_1)^2 - (\mathbf{r} - \rho_2)^2] \right] \cdot \langle \exp[\chi(\mathbf{r}, \rho_1) + \chi(\mathbf{r}, \rho_2) + iS(\mathbf{r}, \rho_1) - iS(\mathbf{r}, \rho_2)] \rangle, \quad (2)$$

对式(2)作坐标变换  $\rho_1 - \rho_2 = \rho$ ,  $\rho_1 + \rho_2 = 2\mathbf{R}$ , 则

$$\langle I_N(\mathbf{r}) \rangle = \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \iint d^2\rho \exp\left(-\frac{ik}{L} \mathbf{r} \cdot \rho\right) \iint d^2R u_0\left(\mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) u_0^*\left(\mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) \exp\left(\frac{ik}{L} \mathbf{R} \cdot \rho\right) \cdot \langle \exp\left[\chi\left(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) + \chi\left(\mathbf{r}, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) + iS\left(\mathbf{r}, \mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) - iS\left(\mathbf{r}, \mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right)\right] \rangle, \quad (3)$$

理论和实验都已表明, 对数振幅起伏和位相起伏一般情况下满足高斯分布, 且两者相互独立, 因此式(3)可写成

$$\langle I_N(\mathbf{r}) \rangle = \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \iint d^2\rho \exp\left(-\frac{ik}{L} \mathbf{r} \cdot \rho\right) \exp\left(-\frac{1}{2} D(\rho)\right) \cdot \iint d^2R u_0\left(\mathbf{R} + \frac{\rho}{2}\right) u_0^*\left(\mathbf{R} - \frac{\rho}{2}\right) \exp\left(\frac{ik}{L} \rho \cdot \mathbf{R}\right), \quad (4)$$

这里  $D(\rho)$  是球面波的波结构函数。对于常见的 Kolmogorov 型湍流大气, 其普遍表达式为

$$D(\rho) = 2.91 k^2 L \rho^{5/3} \int_0^1 d\eta \eta^{5/3} O_n^2(\eta). \quad (5)$$

在均匀湍流大气中上式即为

$$D(\rho) = 6.88 (\rho/r_0)^{5/3}. \quad (6)$$

这里  $r_0 = 3.02 (O_n^2 L k^2)^{-3/5}$  是球面波的大气相干长度, 其中  $O_n^2$  是大气湍流结构常数, 它表征了大气折射率的变化情况。  $r_0$  是自适应光学中一个很有用的量, 可以采用多种间接测量的方法来获到。

假设初始发射场为聚焦的高斯光束

$$u_0(\rho) = \exp \left[ -\left( \frac{4}{D^2} + \frac{ik}{2L} \right) \rho^2 \right]. \quad (7)$$

$D$  为光束截面上光场降为中心值的  $e^{-1}$  时的光束直径。将式(7)代入式(4)并对  $\mathbf{R}$  积分后可得

$$\begin{aligned} \langle I_N(\mathbf{r}) \rangle &= \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \iint d^2\rho \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{D^2} - \frac{ik}{L} \mathbf{r} \cdot \rho - \frac{1}{2} D(\rho) \right] \cdot \frac{\pi D^2}{8} \\ &= \frac{\pi^2 D^2}{4\lambda^2 L^2} \int d^2\rho \rho \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{D^2} - 3.44 (\rho/r_0)^{5/3} \right] J_0 \left( \frac{k r \rho}{L} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

利用平方近似并对上式进行积分运算后可得

$$\langle I_N(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\rho_0^2 \pi^2 D^4}{8\lambda^2 L^2 (D^2 + 2\rho_0^2)} \exp \left[ -\frac{\pi^2 D^2 \rho_0^2 r^2}{\lambda^2 L^2 (D^2 + 2\rho_0^2)} \right]. \quad (9)$$

式中  $\rho_0 = 0.48 r_0$ 。

自适应光学位相补偿, 就是将位相扰动  $S_0(\rho)$  施加到初始发射场上, 初始发射场变为

$$\tilde{u}_0(\rho) = u_0(\rho) \exp(iS_0(\rho)). \quad (10)$$

补偿后光束截面上的光场分布为

$$u_c(r) = \frac{k}{2\pi i L} \iint d^2\rho u_0(\rho) \exp \left[ \frac{i k}{2L} (\mathbf{r} - \rho)^2 + \chi(r, \rho) + iS(\mathbf{r}, \rho) + iS_0(\rho) \right]. \quad (11)$$

在柔形镜情况下  $S_0(\rho) = -S(\rho, 0)$ 。根据对易原理  $S(\rho, 0) = S(0, \rho)$ ，在等晕域内且有  $S(0, \rho) = S(\mathbf{r}, \rho)$ ，因此式(11)可改写成

$$u_c(r) = \frac{k}{2\pi i k} \iint d^2\rho u_0(\rho) \exp \left[ \frac{i k}{2L} (\mathbf{r} - \rho)^2 + \chi(\mathbf{r}, \rho) \right]. \quad (12)$$

由此可得平均光强分布为

$$\begin{aligned} \langle I_c(r) \rangle &= \left( \frac{k}{2\pi L} \right)^2 \iint d^2\rho_1 d^2\rho_2 u_0(\rho_1) u_0^*(\rho_2) \\ &\quad \cdot \exp \left[ \frac{i k}{2L} [(\mathbf{r} - \rho_1)^2 - (\mathbf{r} - \rho_2)^2] \right] \cdot \exp \left[ -\frac{1}{2} D_x(\rho_1 - \rho_2) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

上式中的  $D_x(S)$  是球面波对数振幅起伏的结构函数。将式(7)代入式(13)可得

$$\langle I_c(r) \rangle = \frac{\sigma^2 D^2}{8\lambda^2 L^2} \iint d^2\rho \exp \left[ -\frac{2\rho^2}{D^2} - \frac{1}{2} D_x(\rho) \right] \exp \left[ -\frac{i k}{L} \mathbf{r} \cdot \rho \right]. \quad (14)$$

对数振幅起伏的结构函数  $D_x(\rho) = 2[\sigma_x^2 - B_x(\rho)]$ ， $\sigma_x^2$  和  $B_x(\rho)$  分别为振幅起伏的方差和相关函数。由于相关函数  $B_x(\rho)$  是  $\rho$  的短程函数，因此在大部分积分区域上有  $D_x(\rho) \doteq 2\sigma_x^2$ 。文献 [5] 根据强起伏区的饱和理论求得了在均匀的 Kolmogorov 湍流大气中适用于整个起伏区的方差表达式

$$\sigma_x^2 = 2.95 \sigma_T^2 \int_0^1 du [u(1-u)]^{5/6} \int_0^\infty dy y^{-11/6} \sin^2 y M_{ST}^0, \quad (15)$$

上式中

$$M_{ST}^0 = \exp \{ -\sigma_T^2 [u(1-u)]^{5/6} F(y) \}. \quad (16)$$

$$F(y) = 8.54 \left\{ 0.315 y^{-5/6} [1 - J_0(2y)] + y^{5/6} \int_{2y}^\infty d\xi \xi^{-8/3} [1 - J_0(\xi)] \right\}. \quad (17)$$

这里  $\sigma_T^2 = 0.124 C_n^2 k^7 L^{11/6}$  是用平缓扰动法得到的球面波的起伏方差。式(15)已得到了实验的支持。这样

$$\langle I_c(r) \rangle = \frac{\sigma^2 D^4}{16\lambda^2 L^2} \exp \left[ -\frac{\sigma^2 D^2 r^2}{2\lambda^2 L^2} - \sigma_x^2 \right]. \quad (18)$$

上式中  $\sigma_x^2$  由式(15)~(17)给出。

从式(9)和(18)可以看到，补偿前与补偿后光束截面上的平均光强分布和初始光束一样都是高斯分布，不过它们的峰值光强和半宽度各不相同。补偿前由于湍流的影响，中心光强下降了，这是由于湍流扩展使能量分散在较大的范围内；经柔形镜校正后，近轴光强有明显提高，能量更多地集中在近轴范围内，但由于振幅起伏的限制使轴上光强仍低于衍射极限。例如当  $D = 0.25 \text{ m}$ ， $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ， $L = 10 \text{ km}$ ， $r_0 = 0.15 \text{ m}$  时，补偿前的中心光强仅为衍射极限的 15%，降低了近一个量级，补偿后轴上光强约为衍射极限的 90% (见图 2)。

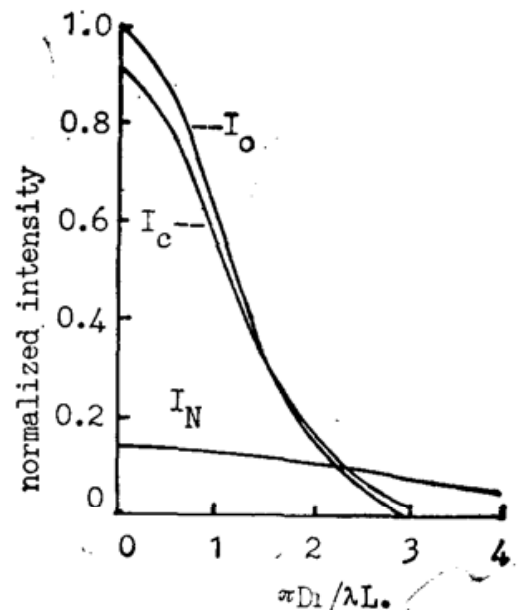


Fig. 2 Average intensity distribution ( $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ ,  $D = 0.25 \text{ m}$ ,  $r_0 = 15 \text{ cm}$ )

### 三、斯特列尔比

为了表征大气湍流引起的光束质量下降以及经过自适应光学补偿后光束质量的改善,人们已用了多种不同的方法<sup>[2]</sup>。本文认为用斯特列尔比  $SR = I/I_0$  能更正确地反映光束质量,其中  $I$  为实际系统的光束远场中心光强,  $I_0$  为真空情况下的衍射极限。这是个很直观的量,且便于直接测量。

利用第二节的结果可很容易得到补偿前及补偿后的斯特列尔比分别为

$$SR_N = \frac{1}{1 + 2.17(D/r_0)^2}, \quad (19)$$

$$SR_c = \exp(-\sigma_x^2). \quad (20)$$

式(20)中的  $\sigma_x^2$  由式(15)~(17)给出。

式(19)表明补偿前的斯特列尔比是  $D/r_0$  的简单函数,  $SR_N$  随  $D/r_0$  的增加而下降。在极限情况  $D/r_0 \ll 1$  和  $D/r_0 \gg 1$  时,  $SR_N$  分别趋近于 1 和  $0.46(D/r_0)^{-2}$ 。即当  $D \ll r_0$  时光束质量基本上没有退化;  $D \gg r_0$  时光束质量严重下降,这时必须用自适应光学来改善光束质量。式(20)所示的斯特列尔比  $SR_c$  既表示补偿后的光束质量,这是柔形镜校正的极限,同时也反映了振幅起伏的影响,它由振幅起伏方差  $\sigma_x^2$  决定,而  $\sigma_x^2$  取决于  $\sqrt{\lambda L}/r_0$  的大小。  $R_t = \sqrt{\lambda L}/r_0$  表征起伏的强度,定义  $R_t < 1$  为弱起伏区,  $1 \leq R_t \leq 5$  为中等强度起伏区,  $R_t > 5$  为强起伏饱和区。图 3 给出了  $SR_c$  随  $R_t$  的变化曲线。

可以看到:当  $R_t < 5$  时  $SR_c$  随  $R_t$  的增大而减小,在  $R_t = 5$  附近达到极小值约 0.5,这时校正后的中心光强约为衍极限的一半,而后随着  $R_t$  的继续增大  $SR_c$  略有提高,最后趋于饱和值 0.66。这个变化趋势是与振幅起伏的变化相应的,在弱起伏区中振幅起伏随起伏强度的增大而增大,而在强起伏区中振幅起伏反而减小并趋于饱和。

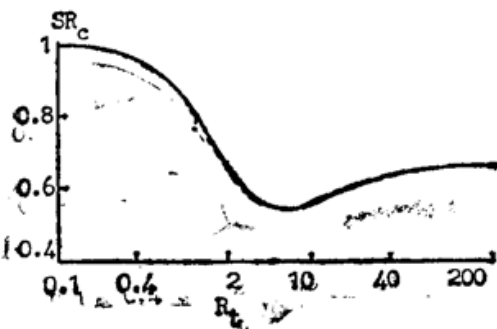


Fig. 3 Limit of Strehl's ratio

由于  $r_0$  是湍流强度、激光波长及距离的函数因此斯特列尔比的极限值同时与湍流强度、波长及距离有关。结果表明:在弱湍流中长波长的极限值稍大,而在强湍流中则有可能

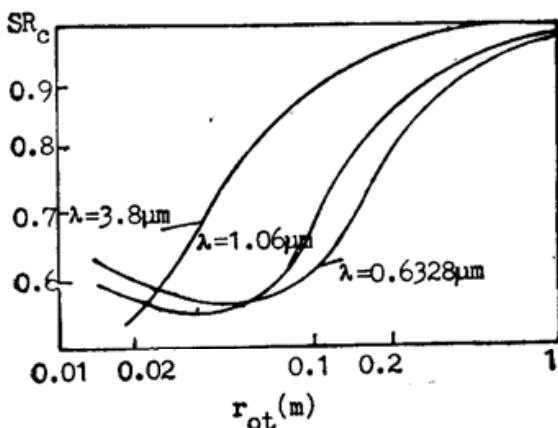


Fig. 4 Strehl's ratio for different wavelength  $L = 10$  km

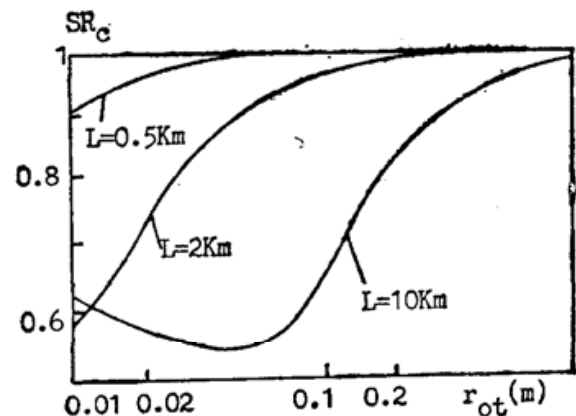


Fig. 5 Strehl's ratio for different range ( $\lambda = 1.06 \mu\text{m}$ )

短波长的更大,这是因为弱湍流中长波长的振幅起伏小,由于短波长先进入饱和区使得在强湍流中短波长的振幅起伏反而小的缘故。同样的道理,对于同一波长的激光在弱湍流中传输距离较近时斯特列尔比的极限值大,而在强湍流中则可能相反。从图4、5中可以看到上面的结论。

由光强分布和斯特列尔比的分析 and 讨论,可清楚地看出振幅起伏对自适应光学系统的限制。

## 四、讨 论

本文分析了高斯光束在 Kolmogorov 湍流中振幅起伏对柔形镜自适应光学系统校正效果的限制,其中引用了若干假定,这对本文的结论起了一定的限制作用。不过大部分假定是处理湍流效应的理论工作中所惯常采用的,如对数振幅和相位满足高斯分布,以及平均强度推导中的平方近似等等,一方面客观事实已证明上述假定是正确的,另一方面即使引入部分误差,也不影响结论的一般性。但是,等晕域的假定将使本文的结论只适用于一定范围内,当考虑的范围超过等晕域时, $S(r, \rho)$  将不能用  $S(0, \rho)$  来代替。事实上,自适应光学系统在校正湍流效应时也只能在等晕域内发挥其作用,超出等晕域时校正的效果将大为降低。

文中另一重要的前提条件是  $S_0(\rho) = -S(\rho, 0)$ , 此条件意味着相位共轭,相位畸变可以得到补偿。采用相位共轭型的柔形镜或非线性光学自适应系统在理想条件下能够满足这个条件。实际上一个具体的系统还存在其他一些相位误差,这时 Strehl 比除了受湍流引起的振幅起伏的限制以外,还将受到这些相位误差的限制。此外,如果不是相位共轭系统,而是一种寻优控制系统,则不能满足上述条件,本文的结论显然会出现变化,不过这些问题不属本文讨论的范围。

通过前两节的讨论,得到的主要结论是:振幅起伏(闪烁)的影响使柔形镜自适应光学系统的 Strehl 比存在一极小值( $SR_{\min} = 0.5$ ), (其物理机制是因为闪烁在强起伏区存在饱和效应,  $\sigma_x^2$  在达到饱和值后不再继续增加,反而有所下降。不过  $SR_{\min} = 0.5$  这个数值显然同本文所采用的对数振幅起伏方差表达式(15)有关。在其他模式下,极小值的具体数值可能有变化,但出现极小值这个规律是不会改变的。在条件具备时,对这个结论加以验证是很有意义的。

最后应当指出,本文在讨论中还认为相关函数  $B_x(\rho)$  是  $\rho$  的短程函数,在大部分积分区域中  $D_x(\rho) \simeq 2\sigma_x^2$ 。事实上强起伏区中这样处理是比较近似的。关于这个问题的影响,将在另一篇文章中进行分析<sup>[7]</sup>。

## 参 考 文 献

- [1] J. E. Pearson *et al.*; *Appl. Opt. & Optical Engineering*, 1979, **7**, No. 245.
- [2] J. Y. Wang; *Appl. Opt.*, 1978, **17**, No. 16 (Aug), 2580.
- [3] D. L. Fried; *J. O. S. A.*, 1966, **56**, No. 11 (Nov), 1427.
- [4] J. H. Shapiro; *J. O. S. A.*, 1976, **66**, No. 5 (May), 460.
- [5] R. J. Hill, S. F. Clifford; *J. O. S. A.*, 1981, **71**, No. 6 (Jun), 675.
- [6] R. F. Lutomirsk, H. T. Yura; *Appl. Opt.*, 1971, **10**, No. 7 (Jul), 1652.
- [7] 宋正方等;待发表。

## Limitations of amplitude fluctuation on adaptive optics system

FENG YUEZHONG, GONG ZIBEN AND SONG ZHENGFANG

(Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica, Hefei 230031)

(Received 14 August 1990; revised 29 January 1991)

### Abstract

By discussing intensity distribution and Strehl's ratio before and after perfect phase compensation with a rube-mirror, the limitations of amplitude fluctuation on adaptive optics system are analysed. Although phase distortion can be corrected perfectly, there is a theoretical limit on compensation because the amplitude distortion can not be compensated. A general expression of the limit Strehl's ratio which is variated in whole region of fluctuation is derived. The theories show that the corrected peak intensity is only half of the diffraction intensity when amplitude fluctuation is maximum, the lowest value of the Strehl's ratio limit is 0.5.

**Key words:** amplitude fluctuation, adaptive optics, rube-mirror.