

# 光栅衍射像的反差、位相和周期的分析

潘 英 俊

(重庆大学光电精密机械研究所, 重庆 630044)

## 提 要

本文从理论上导出了相干光照明下菲涅耳衍射场中离开泰伯自成像平面时光栅像的反差、位相和周期的变化。得到了球面波和平面波照明下, 光栅的傅里叶像生成的条件, 从而定量地说明了泰伯效应与Lau效应的某种一致性。理论结果被实验验证。

关键词: 菲涅耳衍射, 光栅, Talbot效应, Lau效应。

## 一、前 言

光栅衍射像的反差、位相和周期的变化对于复制高精度的光栅, 提高莫尔拓扑三维测量的精度以及制造高精度的光栅传感器等都有重要意义。近年来, 泰伯效应在光信息处理中的应用引起人们的兴趣<sup>[1,2]</sup>, 文献[3]用平面波照明, 得到了离开泰伯成像平面某特定位置的光栅像的反差的变化。最近, 在研究非相干照明下双光栅成像的Lau效应时, 有人用相干和部分相干理论研究了Lau效应的菲涅耳成像, 并提供了菲涅耳成像的强度分布的细节<sup>[4,5]</sup>。本文提出了相干光照明下菲涅耳衍射场中光栅像的反差、位相和周期的变化的理论和实验结果。定量地导出了离开傅里叶像面任意位置的光栅像的反差和位相的变化, 以及基于一定条件的光栅菲涅耳像的周期的变化。从而很容易地解释了文献[4,5]方法得到的Lau条纹的相应变化。

## 二、理 论

如图1所示, 位于 $x_0y_0$ 平面的相干光源发出的光波沿着 $z$ 方向传播, 经位于 $x_1y_1$ 平面内的光栅 $G$ 衍射后, 在观察平面 $x_2y_2$ 内研究其复振幅分布。设 $x_2y_2$ 平面内的复振幅分布为 $u_2(x_2)^*$ , 则

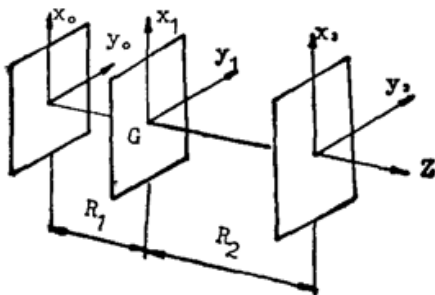


Fig. 1

$$u_2(x_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} q(x_0) t(x_1) \exp \left\{ i k \left[ \frac{(x_1 - x_0)^2}{2R_1} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2R_2} \right] \right\} dx_0 dx_1, \quad (1)$$

式中 $q(x_0)$ 为光源函数,  $t(x_1)$ 为光栅 $G$ 的透射函数,  $R_1$ 、 $R_2$ 分别为光源到光栅、光栅至观察面之间距离,  $k = (2\pi/\lambda)$ 。当位于 $x_0y_0$ 平面内的光源为相

收稿日期: 1990年7月13日; 收到修改稿日期: 1991年2月21日

\* 为简便计, 只考虑一维情况, 且忽略了复常数因子。

干点光源时, 即

$$q(x_0) = \delta(x_0 - \xi), \quad (2)$$

式中  $\xi$  为  $x_0$  轴上的动坐标。(1)式积分后设点光源位于坐标原点, 即  $\xi = 0$ , 化简成为

$$u_2(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(x_1) \exp(ikx_1^2/2R_1) \exp[ik(x_2 - x_1)^2/2R_2] dx_1, \quad (3)$$

光栅的透射函数

$$\left. \begin{aligned} t(x_1) &= \sum_n A_n \exp(i2\pi n x_1/w), \\ A_n &= \alpha \sin \alpha(n\alpha), \quad \alpha = a/w, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中  $\sum_n$  表示  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$ ,  $A_n$  为傅里叶系数,  $\alpha$  为光栅的开口比,  $a$  为光栅透光线宽度,  $w$  为光栅周期。将(4)式代入(3)式积分后得

$$u_2(x_2) = \exp\left[-\left(\frac{i\pi R_2}{M} \left(\frac{x_2}{\lambda R_2}\right)^2\right)\right] \sum_n A_n \exp\left[-\frac{i\lambda\pi R_1 R_2 n^2}{(R_1 + R_2)w^2}\right] \exp\left[\frac{i2\pi n R_1 x_2}{(R_1 + R_2)w}\right], \quad (5)$$

于是得  $x_2 y_2$  平面上的强度分布为

$$I_2(x_2) = u_2(x_2) u_2^*(x_2) = \left| \sum_n A_n \exp\left[-\frac{i\pi R_1 R_2 \lambda n^2}{(R_1 + R_2)w^2}\right] \exp\left[\frac{i2\pi n R_1 x_2}{(R_1 + R_2)w}\right] \right|^2, \quad (6)$$

式中第一指数因子称为衍射因子, 若衍射因子

$$\exp\left[-\frac{i\pi R_1 R_2 \lambda n^2}{(R_1 + R_2)w^2}\right] = 1. \quad (7)$$

则

$$I_2(x_2) = \left| \sum_n A_n \exp\left[\frac{i2\pi n R_1 x_2}{(R_1 + R_2)w}\right] \right|^2 = \sum_n A_n \exp\left[\frac{i2\pi n R_1 x_2}{(R_1 + R_2)w}\right]. \quad (8)$$

将(8)式与(4)式比较可知, (8)式即为引入了放大率  $M = (R_1 + R_2)/R_1$  的光栅  $G$  的像。

### 三、讨 论

#### 1. 泰伯成像位置

球面波照明下, 据(7)式产生光栅像的条件为

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \mu \frac{2w^2}{\lambda}, \quad (9)$$

式中  $\mu$  为整数。(9)式为球面波照明下光栅的自成像条件, 即球面波照明下的泰伯效应。若  $R_1 \rightarrow \infty$  则成为平面波照明, 此时  $x_2 y_2$  平面上的光强分布据(6)式为

$$I_2(x_2) = \left| \sum_n A_n \cos\left(\frac{n^2 \pi \lambda R_2}{w^2}\right) \exp\left(\frac{2n\pi x_2}{w}\right) \right|^2. \quad (10)$$

产生光栅像的条件为

$$R_2 = \mu \frac{2w^2}{\lambda}, \quad (11)$$

(11)式为平面波照明的泰伯成像条件, 据此条件由(10)式得到的光栅像的表达式与(4)式完全相同。

#### 2. 两分离的泰伯像之间的光栅像反差和位相的变化

据(6)式和(10)式的衍射因子可以计算两分离的泰伯像之间的光栅像的反差和位相变化\*。将(11)式中的 $\mu$ 用任意正实数 $\mu'$ 代替,当 $\mu'$ 的变化范围为 $p \sim p+1$  ( $p=0, 1, 2, \dots$ )时,光栅像离开泰伯像的距离为

$$R_2 = \mu' \frac{2w^2}{\lambda}. \quad (12)$$

此时,(10)式中余弦函数的值的变化过程为光栅像的反差的变化过程为 $1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 1$ ,光栅像的位相的变化过程为 $0 \rightarrow \pi/2 \rightarrow \pi \rightarrow 3\pi/2 \rightarrow 2\pi$ ,余弦函数的值为 $-1$ 时,光栅像的反差为 $1$ ,位相变化 $\pi$ 。以上的变化过程示于图2中。

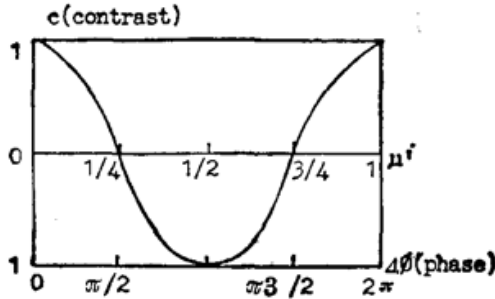


Fig. 2 The variation of contrast and phase of the grating's image within first period of Talbot self-imaging

### 3. 菲涅耳像\*\*的成像条件及其周期的变化

仍以平面波照明为例,将(10)式写成

$$I(x_2) = \sum_n \sum_{n'} A_n A_n^* \exp \left[ \frac{-i\pi\lambda R_2 (n^2 - n'^2)}{w^2} \right] \times \exp \left[ \frac{i2(n - n')\pi x_2}{w} \right], \quad (13)$$

当上式中第一指数因子为 $1$ (或 $-1$ )时,(13)式就成为光栅像(或位相为 $\pi$ 的光栅的反转像)的表达式。此时,菲涅耳像的条件可写为

$$R_2 = (\alpha/\beta) (w^2/\lambda), \quad (n - n') = \beta\gamma, \quad (14)$$

式中 $\beta, \alpha$ 为互质的整数, $\gamma$ 为整数。

(1) 当 $\beta$ 为 $1, \alpha$ 为偶数时,(13)式为

$$I_A(x_2) = \sum_n \sum_{n'} A_n A_n^* \exp \left[ \frac{i2\pi(n - n')x_2}{w} \right] = \sum_j A_j \exp \left[ \frac{i2j\pi x_2}{w} \right], \quad (15)$$

(2) 当 $\beta$ 为 $1, \alpha$ 为奇数时,(13)式为

$$I_B(x_2) = \sum_n \sum_{n'} A_n A_n^* (-1)^{n-n'} \exp \left[ \frac{i2\pi(n - n')x_2}{w} \right] = \sum_j A_j (-1)^j \exp \left[ \frac{i2j\pi x_2}{w} \right], \quad (16)$$

$j = n - n'$ , 为正整数。

(3) 一般情况下,当 $\beta, \alpha$ 为互质的整数,且 $n - n' = \beta\gamma$ 时,光栅像的强度分布可归入(15)式或(16)式的情况。因为有 $j = n - n' = \beta\gamma$ 的条件,将(15)、(16)式与(4)式比较,可知菲涅耳像的周期

$$w' = (w/\beta), \quad (17)$$

文献[6]中推得的Lau条纹的周期为

$$w' = (w/\beta) (f/z_0). \quad (18)$$

式中 $z_0$ 为Lau效应中两光栅间的距离, $f$ 为观察透镜的焦距。可以论证,(17)式与(18)式在一定条件下是统一的。

(1)、(2)、(3)中讨论的菲涅耳像的成像条件与文献[6]的6种情况是一致的。这些讨论都定量地说明了泰伯效应与Lau效应的某种一致性。

此外,为了得到符合(17)式的高反差的菲涅耳像,还应满足如下条件<sup>[4]</sup>  $\beta < \omega/a$ 。

\* 为简便计,讨论平面波照明的情况。

\*\* 这里将非精确的泰伯成像称为菲涅耳像。

### 四、实 验

平面波照明下的实验装置如图 3 所示(球面波照明时去掉透镜  $L_2$  即可)。图 4~图 6 的三组照片验证了理论分析; 照片未经硬限幅处理, 实验参数如表 1 所列, 长度单位均为 mm, 波长  $\lambda = 6.328 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 。

Table 1 The parameters and results of the experiment

	$R_1$	$w$	$a/w$	$R_2 = \mu' \frac{2\omega^2}{\lambda}$	contrast $C$	phase variation $\Delta\phi$	period $w' = \frac{\omega}{\beta}$	remarks
Fig. 4 The variation of contrast and phase of the grating's image	$\infty$	0.5	1/2	a) 98.8 ( $\mu' = 1/8$ )	0.707	$\pi/4$	—	contrast $C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$
				b) 197.5 ( $\mu' = 2/8$ )	0	$\pi/2$	—	
				c) 296.3 ( $\mu' = 3/8$ )	0.707	$3\pi/4$	—	
				d) 395.1 ( $\mu' = 4/8$ )	1	$\pi$	—	
				e) 790.1 ( $\mu' = 1$ )	1	$2\pi$	—	
Fig. 5 The period variation of the Fresnel image	$\infty$	0.5	1/5	a) 98.8 ( $\beta = 4$ )	—	—	$\omega/4$	$a/\omega = 1/5$ conform to eq. (19).
				b) 197.5 ( $\beta = 2$ )	—	—	$\omega/2$	
				c) 296.3 ( $\beta = 4/3$ )	—	—	$4\omega/3$	
				d) 395.1 ( $\beta = 1$ )	—	—	$\omega$	
				e) 790.1 ( $\beta = 1$ )	—	—	$\omega$	
Fig. 6 The magnification of the grating's image illuminated by the spherical wave	395.1	0.25	1/2	$R_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \mu \frac{2\omega^2}{\lambda}$	magnification $M = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$	$M_b/M_a$		
						theory data	experiment data	
				a) 395.1 ( $\mu = 1$ )	2	0.6666	0.6696	
b) 131.1 ( $\mu = 1/2$ )	1.333							

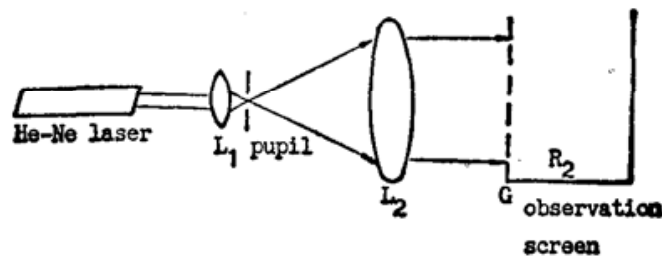


Fig. 3 Schematic diagram of the experimental setup



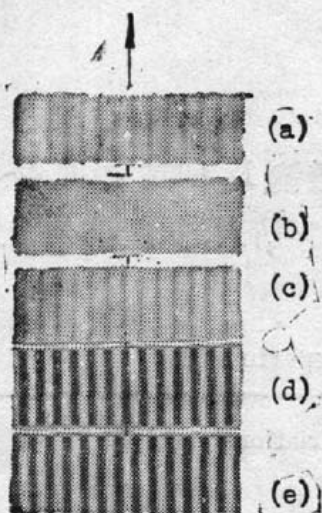


Fig. 4

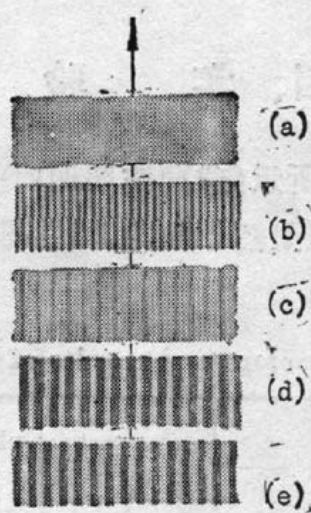


Fig. 5



Fig. 6

## 参 考 文 献

- [1] K. Potoski; *Opt. Comm.*, 1979, **29**, No. 1 (Jun), 13.
- [2] K. Potoski; *Opt. Acta.*, 1984, **31**, No. 1 (Jun), 23.
- [3] K. Potoski *et al.*; *Opt. Acta.*, 1982, **29**, No. 9, 565.
- [4] F. Gori; *Opt. Comm.*, 1979, **31**, No. 1 (Oct), 4.
- [5] S. Sudal *et al.*; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 6 (Mar), 1107.

## Analysis on the contrast, phase and period of grating's diffraction image

PAN YINGJUN

(Chongqing University, Dept. Of Opto-Electronic Precision Instrument Chongqing 630014)

(Received 13 July 1990; revised 21 February 1991)

### Abstract

In the Fresnel diffraction field, the variation of contrast, phase and period of the grating's image are derived theoretically in the plane offsetted from the Talbot self-imaging plane under the coherent illumination. The image condition of Fourier image of the grating is obtained under the illumination of spherical wave and plane wave. So that the coincidence to some extent between the Talbot effect and Lau effect is demonstrated quantitatively. The results of theory is coincident with that of experiment.

**Key words:** fresnel diffraction; grating; Talbot effect; Lau effect.