

# 用光电混合系统解线性方程组\*

李 明 陈岩松

(中国科学院物理研究所, 北京 100080)

## 提 要

本文提出一种用于迭代法求解线性方程组的光电混合系统。该系统的光学部分主要由单个全息透镜组成,它执行矩阵与矢量的乘法运算;系统的其余部分执行矢量的测量与求和,它由 UOD 探测器件和一台微机组成。使用这个光电混合系统,用迭代法对一个 4 元线性方程组求解,实验结果与理论解比较,误差约为 5%。

关键词: 光电混合处理器、矩阵乘法、解线性方程组。

## 一、引 言

近年来,在光计算领域中有很多关于矩阵运算的工作被报道<sup>[1~5]</sup>。但利用光学系统解线性方程组还少见报道。1982年, Casasent 提出了将声光调制的矢量-矩阵乘法光学系统加电反馈迭代求解线性方程组的方案<sup>[2]</sup>。1986年 Caulfield 等人提出了用模拟光计算系统和数字计算系统组合成双模式光计算处理器求解线性方程组的想法<sup>[4]</sup>。但是,他们的文章都未给出相应的实验和结果。

众所周知,在数学上存在着多种求解线性方程组的迭代方法。其中较为常用的是简单迭代法。简单迭代法的每次迭代循环都包含着一个矢量与矩阵的内积运算和一个矢量的求和运算。前者在光学上是不难实现的。后者用电学系统去作更适宜。因此本文采用光电混合运算系统执行简单迭代法求解线性方程组是一种十分恰当的选择。

## 二、原 理

设一线性方程组

$$AX = B, \quad (1)$$

式中  $A$  与  $B$  分别是给定的二维方矩阵与一维矢量,  $x$  为未知矢量。对(1)式进行某种初等变换,得到方程组的迭代公式:

$$X^{(k+1)} = TX^{(k)} + D, \quad (2)$$

式中矩阵  $T$  与  $A$  有关, 矢量  $D$  与  $B$  有关, 上角标  $k$  和  $k+1$  是迭代的序号。迭代公式(2)只有满足下列条件之一时才是收敛的。

收稿日期: 1990年12月17日; 收到修改稿日期: 1991年2月19日

\* 本工作获国家自然科学基金和 TWAS·RG MP890-035 支持。

$$\left. \begin{aligned} \max_{1 \leq i < n} \sum_{j=1}^n |t(i, j)| < 1, \\ \max_{1 \leq j < n} \sum_{i=1}^n |t(i, j)| < 1, \quad \sum_{i,j=1}^n |t_{ij}|^2 < 1, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中  $t(i, j)$  是矩阵  $T$  的第  $i$  行第  $j$  列元素。如果上述三个条件都不能得到满足, 则需要进一步对(2)式进行变换以改变(2)式中矩阵  $T$  与矢量  $B$  的内容, 直到  $T$  的矩阵元  $t(i, j)$  满足上述三条件式之一时为止。

利用(2)式迭代求解线性方程组所得到的解的精度可以由下式确定

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon, \quad (4)$$

式中  $\varepsilon$  是给定任意小量。

本文设计和建立的光电混合运算系统如图 1 所示。在图 1 所示的系统中, 起调制作用的全息透镜的复振幅分布  $H(m)$  由下列方程组确定<sup>[6~9]</sup>:

$$\begin{aligned} t(i, j) &= \sum_m G(i, m) H(m) G(m, j), \\ i &= 1, 2, \dots, N_2, \quad m = 1, 2, \dots, N, \\ j &= 1, 2, \dots, N_1 \end{aligned} \quad (5)$$

Fig. 1 Scheme of Optical-digital Computing System

上述两个表达式中,  $G$  是傅里叶变换因子,  $N_1, N$  与  $N_2$  分别是输入平面、全息透镜平面与输出平面上取样单元的数目。当光学系统的参数满足下述关系式时:

$$(\Delta x \Delta x_1 / f \lambda) = N^{-1}, \quad (\Delta x \Delta x_2 / f \lambda) = N_2^{-1}, \quad N = N_1 N_2, \quad (6)$$

方程组(5)存在唯一解, 并且根据么正性, 可以直接得到如下解。

$$H(m) = \left[ \sum_{i=1}^{N_2} \sum_{j=1}^{N_1} G^*(m, i) t(i, j) G(j, m) \right] / \sin c(\pi m / N), \quad (7)$$

在(6)式和(7)式中,  $\Delta x_1, \Delta x$  和  $\Delta x_2$  分别是输入, 全息透镜和输出平面上的取样周期,  $f$  是傅里叶透镜的焦距,  $\lambda$  为光波长,  $r_1$  是输入平面上取样单元的光孔宽度与取样周期之比。这样, 只要给出一个矩阵(来自迭代公式(2)), 就可以根据(7)式确定全息透镜的复振幅分布  $H(m)$ ; 而光学系统的设计参数则可根据(6)式在一个合理的范围内自由选择。

### 三、实验与结果

任意给定一个 4 元线性方程组;

$$\left. \begin{aligned} 38x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 14x_4 &= 70, & 100x_1 + 91x_2 + 26x_3 + 48x_4 &= 300, \\ 9x_1 + 6x_2 + 31x_3 + 7x_4 &= 115, & x_1 + 17x_2 + 30x_3 + 94x_4 &= 200, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

对方程组(8)进行适当的变换, 并移项变换成迭代形式(9)式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}^{(k+1)} = - \begin{pmatrix} -0.24 & 0.06 & 0.10 & 0.28 \\ 0.24 & -0.15 & 0.16 & 0.20 \\ 0.18 & 0.12 & -0.38 & 0.14 \\ 0.01 & 0.17 & 0.30 & -0.06 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1.4 \\ 1.6 \\ 2.3 \\ 2.0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

它与(2)式相比较得到

$$T = \begin{pmatrix} -0.24 & 0.06 & 0.10 & 0.28 \\ 0.24 & -0.15 & 0.16 & 0.20 \\ 0.18 & 0.12 & -0.33 & 0.14 \\ 0.01 & 0.17 & 0.30 & -0.06 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$D^T = (1.4, 1.6, 2.3, 2.0)^T. \quad (11)$$

(角标  $T$  意为转置)经计算验证,矩阵  $T$  满足迭代收敛条件(3)式。(10)式表明,参数  $N_1 = N_2 = 4$ ,  $N = 16$ , 把它们与矩阵  $T$  的内容代入(7)式并令  $r_1 = 0.4$  则可以求得全息透镜的复振幅分布  $H(m)$ , 其数值示于表 1 中。

Table 1 Amplitude-phase Values of the holographic mask  $H(m)$

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8
Amplitude	0.211	1.000	0.203	0.193	0.704	0.542	0.657	0.623
Phase	1.222	-3.057	-1.923	0.822	-0.193	-0.300	2.033	-0.088
$m$	9	10	11	12	13	14	15	16
Amplitude	0.623	0.657	0.542	0.704	0.192	0.203	1.000	0.211
Phase	0.088	-2.033	0.300	0.193	-0.822	1.923	3.057	-1.222

光学系统的设计参数是根据(6)式和现有的实验条件确定的。它们是  $\Delta x_1 = 0.2052 \text{ mm}$ ,  $\Delta x_2 = 0.8206 \text{ mm}$ ,  $\Delta x = 0.0800 \text{ mm}$ ,  $f = 415 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 6.328 \times 10^{-4} \text{ mm}$ 。

光电混合系统的实验示意图如图 1 所示。图中共焦面上的全息透镜是根据表 1 列出的数据用计算机产生全息图的方法研制的。全息图的振幅和位相分布沿  $x$  方向伸展, 而每一个振幅位相值则用一个  $y$  方向伸展的矩形光栅来表示。若光栅周期为  $p$ , 起始位置为  $y$ , 透光部分孔宽为  $\Delta y$ , 则光栅的一级衍射光的位相为  $\phi = (y/p)$ , 振幅  $A = [\sin(\pi \Delta y/p)/(\pi/p)]$ 。本实验中的全息透镜的光栅周期为  $0.1 \text{ mm}$ , 产生光栅的图形发生器(GOA 3600)的定位精度  $0.1 \mu\text{m}$ 。因此, 全息透镜位相和振幅的精度可达万分位<sup>[7]</sup>。输入矢量的大小是由输入平面上取样单元的透光孔的大小表示的。输出矢量由 CCD 探测列阵测量。其结果经模-数转换送入微机, 并在微机内完成矢量加法。

实验中全息透镜在光路中的位置通过如下过程调准。在  $z$  方向上, 通过毛玻璃产生最大散斑的定位法找到共焦面的位置; 在  $x$  方向上, 通过在全息透镜的  $x$  方向上设置中心线, 并使输入定位方孔在全息透镜平面上产生的  $\sin \theta$  衍射的中心线与标记中心线对准; 至于  $y$  方向上的位置对准度并不重要, 因为此方向是一个周期性的光栅结构。

设定  $(1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$  为方程组的初始解  $X^{(0)}$ 。将表征  $X^{(0)}$  的输入片放在图 1 中的  $x_1$  平面上, 经光电系统的运算得到结果  $X^{(1)}$ ; 以  $X^{(1)}$  为输入矢量再经过光电混合系统进行第二次迭代运算。如此往复迭代, 求出线性方程组的解。表 2 给出了利用光电混合系统迭代求解的实验值和计算机模拟迭代的理论值, 数值表明二者比较接近。

利用计算机解得的方程组的真实解为  $X^r = (1.01, 0.79, 3.04, 1.01)^T$ 。以光电混合系

Table 2 The iterative solutions of the 4-D equations produced by the hybrid optical-digital system and theoretical calculation

iterative time	solutions (1)		solutions (2)		solutions (3)		solutions (4)	
	E exp.	T theo.	E exp.	T theo.	E exp.	T theo.	E exp.	T theo.
1	1.20	1.20	1.08	1.15	2.24	2.24	1.49	1.58
2	1.04	0.95	0.81	0.81	2.44	2.57	1.20	1.21
3	0.99	0.98	0.81	0.83	2.78	2.84	1.25	1.15
4	0.92	0.97	0.77	0.81	2.95	2.94	1.11	1.06
5	1.03	0.99	0.77	0.80	2.95	2.99	1.14	1.03
6	1.05	1.00	0.82	0.80	3.02	3.02	1.10	1.02

统第六次迭代的解与真实解相比,其误差由下式给出

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} \sum_{n=1}^4 \left[ \frac{x^r(n) - x(n)}{x^r(n)} \right]^2} = 5.2\% \quad (12)$$

由于光学系统具有并行性的特点,所以使用光电混合系统可以快速求解线性方程组。当然,限于模拟运算的缘故,解的精度是有限的。但是它作为 Caulfield 提出的双模式光计算处理器求解方程组的方案的前部分是合适的,因为此方案的前部分只要求高速度地求得方程组的粗略解。

本文的完成得到了郑师海、李德华同志的帮助在此表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] J. W. Goodman, A. R. Dias and L. M. Woody; *Opt. Lett.*, 1978, **2**, No. 1 (Jan), 1~4.
- [2] David Casasent; *Appl. Opt.*, 1982, **21**, No. 10 (May), 1859~1865.
- [3] David Casasent *et al.*; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 1 (Jan), 115~124.
- [4] H. J. Caulfield *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 18 (Sep), 3128~3131.
- [5] 陈岩松,张东生,朱伟利;《物理》,1988, **17**, No. 10 (Oct), 626~630; No. 11 (Nov), 685~689; No. 12(Dec), 745~749.
- [6] 杨国楨;《物理学报》,1981, **30**, No. 10 (Oct.), 1340~1350.
- [7] 陈岩松,郑师海,李德华;《物理学报》, 1988, **37**, No. 2 (Feb.), 261~268.
- [8] Yan-song Chen *et al.*; *Appl. Opt.*, 1988, **27**, No. 12 (15 June), 2608~2611.
- [9] 陈岩松,郑师海,李德华;《光学学报》,1989, **9**, No. 12 (Dec), 1078~1083.

## Solving linear equations by using hybrid optical-digital system

LI MING AND CHEN YANSONG

*(Institute of Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)*

(Received 17 December 1990; revised 19 February 1991)

### Abstract

In this paper, a hybrid optical-digital system is presented to solve a set of linear equations in iterative fashion. The optical part of the system consisting of a single holographic mask carries out the vector-matrix multiplication and the other part of the system consisting of a CCD detector and a microcomputer performs the measurement and addition of vectors. By using this system, a set of 4-dimensional equations are iteratively solved, and the experimental results show that the error of the solution is about 5% comparing with theoretical one.

**Key words:** hybrid optical-digital system; matrix multiplication; solving linear equations.