

利用改进的符号数算法和光学符号 代换实现矩阵计算*

周少敏 邬敬贤 金国藩
(清华大学 精密仪器系, 北京 100084)

提 要

本文提出了一种利用改进的符号数算法和多窗口解码光学符号代换法则实现多值矩阵计算的光学方法, 并给出两个多比特改进的符号数矩阵外积计算的实验结果。这一方法具有精度高、速度快等特点。
关键词: 改进的符号数, 多窗口解码, 光学符号代换, 光矩阵计算。

一、引 言

由于光矩阵计算在许多光学变换和信号处理中所起的重要作用, 在国内外得到广泛的研究^[1,2]。光的并行处理和空间互不干扰特性非常适合于矩阵计算二维信息处理。迄今为止, 人们已经提出并实现了许多光学矩阵计算方法, 但总的说来, 尚存在精度不高, 速度低, 大多只能实现二值(0, 1)矩阵的计算。

本文提出一种利用改进的符号数(MSD)算法和多窗口解码光学符号代换法则(MW-OSSR)实现矩阵计算的方法, 改进符号数编码增加了操作数数值范围且隐含一种并行处理方式, 而与操作数长度无关, 多窗口解码光学符号代换法则大大减少了识别过程所需的通道数。这一方法的特点是精度高、速度快以及可完成多值矩阵的计算。

二、基于改进符号数算法的多值矩阵计算

对于多值矩阵的计算, 为增加多值数数值范围, 必须对其进行编码, 常见的二进制码由于其算法上的时序性而不适合用光学实现, 为此, 我们采用可并行处理的改进符号数编码方式。

任意一个十进制数 D 均可由下式表示成改进符号数^[3]

$$D = \sum_{k=0}^{N-1} a_k 2^k = a_{N-1} 2^{N-1} + a_{N-2} 2^{N-2} + \dots + a_1 2^1 + a_0 2^0$$
$$= [a_{N-1} a_{N-2} \dots a_k \dots a_1 a_0]_{MSD}, \quad (1)$$

式中 $a_k \in \{1, 0, \bar{1}\}^*$, N 为改进符号数数字的表达精度。例如, 十进制数 13 在五位精度的改进符号数数字系统可表示成

收稿日期: 1989年12月18日; 收到修改稿日期: 1990年5月29日

* 国家 863 高科技基金资助的项目。

$$(13)_D = (1)2^4 + (0)2^3 + (-1)2^2 + (0)2^1 + (1)2^0 = [10\bar{1}01]_{MSD}$$

或

$$(13)_D = (0)2^4 + (1)2^3 + (1)2^2 + (0)2^1 + (1)2^0 = [01101]_{MSD}, \quad (2)$$

上述两种表示方式在数值上完全等价, 仅仅是编码形式不同而已, 不影响运算结果。改进符号数码同时还可以携带符号信息, 一个改进符号负数是其对应的改进符号数正数的逻辑补 (定义: $1' = \bar{1}$, $0' = 0$, $\bar{1} = 1$, “1”表示取补, 所以

$$(-13)_D = [\bar{1}010\bar{1}]_{MSD} = [0\bar{1}\bar{1}0\bar{1}]_{MSD} \quad (3)$$

这样便可以方便地将改进符号数减法转化为改进符号数加法。

下面, 以两个 2×2 阶多值矩阵为例进行讨论, 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-1} a_{11}^{N-2} \dots a_{11}^1 a_{11}^0 & a_{12}^{N-1} a_{12}^{N-2} \dots a_{12}^1 a_{12}^0 \\ a_{21}^{N-1} a_{21}^{N-2} \dots a_{21}^1 a_{21}^0 & a_{22}^{N-1} a_{22}^{N-2} \dots a_{22}^1 a_{22}^0 \end{pmatrix}_{MSD}, \quad (4)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} b_{11}^{N-1} b_{11}^{N-2} \dots b_{11}^1 b_{11}^0 & b_{12}^{N-1} b_{12}^{N-2} \dots b_{12}^1 b_{12}^0 \\ b_{21}^{N-1} b_{21}^{N-2} \dots b_{21}^1 b_{21}^0 & b_{22}^{N-1} b_{22}^{N-2} \dots b_{22}^1 b_{22}^0 \end{pmatrix}_{MSD}, \quad (5)$$

则

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^{N-1} a_{11}^{N-2} \dots a_{11}^1 a_{11}^0 & a_{12}^{N-1} a_{12}^{N-2} \dots a_{12}^1 a_{12}^0 \\ + b_{11}^{N-1} b_{11}^{N-2} \dots b_{11}^1 b_{11}^0 & + b_{12}^{N-1} b_{12}^{N-2} \dots b_{12}^1 b_{12}^0 \\ a_{21}^{N-1} a_{21}^{N-2} \dots a_{21}^1 a_{21}^0 & a_{22}^{N-1} a_{22}^{N-2} \dots a_{22}^1 a_{22}^0 \\ + b_{21}^{N-1} b_{21}^{N-2} \dots b_{21}^1 b_{21}^0 & + b_{22}^{N-1} b_{22}^{N-2} \dots b_{22}^1 b_{22}^0 \end{pmatrix}_{MSD}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \sum_{l=1}^2 A_l \cdot B_l = (a_{11}^{N-1} a_{11}^{N-2} \dots a_{11}^1 a_{11}^0 \quad a_{21}^{N-1} a_{21}^{N-2} \dots a_{21}^1 a_{21}^0)^T_{MSD} \\ &\quad \cdot (b_{11}^{N-1} b_{11}^{N-2} \dots b_{11}^1 b_{11}^0 \quad b_{21}^{N-1} b_{21}^{N-2} \dots b_{21}^1 b_{21}^0)_{MSD} \\ &\quad + (a_{12}^{N-1} a_{12}^{N-2} \dots a_{12}^1 a_{12}^0 \quad a_{22}^{N-1} a_{22}^{N-2} \dots a_{22}^1 a_{22}^0)^T_{MSD} \\ &\quad \cdot (b_{12}^{N-1} b_{12}^{N-2} \dots b_{12}^1 b_{12}^0 \quad b_{22}^{N-1} b_{22}^{N-2} \dots b_{22}^1 b_{22}^0)_{MSD}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $A_l \cdot B_l$ 称为 $A \cdot B$ 的第 l 个部分积 ($l=1, 2$), T 表示转置。

在实现 $A+B$ 运算时, 仅仅需要进行三次变换而与操作数长度 (N) 无关, 其中隐含了一个进位方式, 使得两个 N bit 改进符号数的加法可并行地完成。图 1(a) 示出了变换规则以及图 1(b) 示出其计算步骤, 图 2 为一个计算实例。

在实现 $A \cdot B$ 运算时, 先用外积算法进行部分积阵列的计算, 其中所遵循的变换规则 (M) 如图 3 所示, 然后对部分积阵列实行移位相加, 依次每两行为一组 (当表达矩阵元素的改进符号数精度 N 为奇数时, 部分积阵列由奇数行组成, 因此, 每两行相加后, 剩下最后一行为单独一组), 经过 $N/2$ 次 (N 为偶数) 或 $(N/2)+1$ 次 (N 为奇数) 循环后, 将得到最后结果。

下面, 再以矩阵求逆 A^{-1} 为例来讨论改进符号数矩阵除法。在线性方程组及线性微分方程的求解中, 矩阵求逆是必须的, 而矩阵求逆又可转化成矩阵除法 A^*/d (A^* 称为 A 的伴随矩阵, d 是 A 的行列式值)。本文利用 Hwang 等人提出的一种改进符号数并行收敛算法^[4]来实现上述过程。设 X 、 Y 分别为被除数和除数, 且满足 $0.5 \leq |X| < 1$, 通过寻找一系

* $T = -1$.

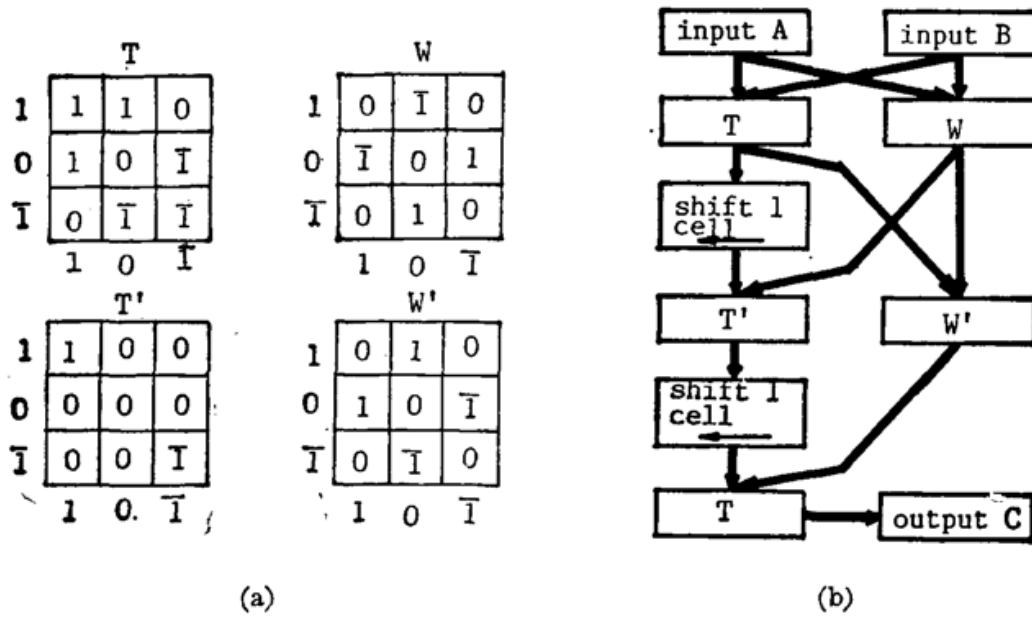


Fig. 1

(a) Transformation rule; (b) operation step

Input Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 24 \\ 9 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10001 & 11000 \\ 01001 & 11100 \end{pmatrix} \text{MSD}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 28 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 01001 & 01101 \\ 11100 & 10110 \end{pmatrix} \text{MSD}$$

Step 1:		T		W	
	11000	11101		11000	10101
	11101	11110		10101	01010
Step 2:		T'		W'	
	000000	000000		101000	101111
	000000	001000		101111	110110
Atep 3:		T		Output Matrix:	
	0101000	0101111		----- C = A+B = $\begin{pmatrix} 24 & 37 \\ 37 & 30 \end{pmatrix}$	
	0101111	0110110			

Fig. 2 A practical computation example

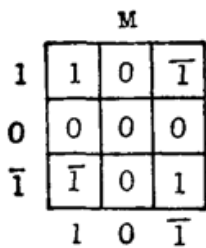


Fig. 3 Transformation rule M

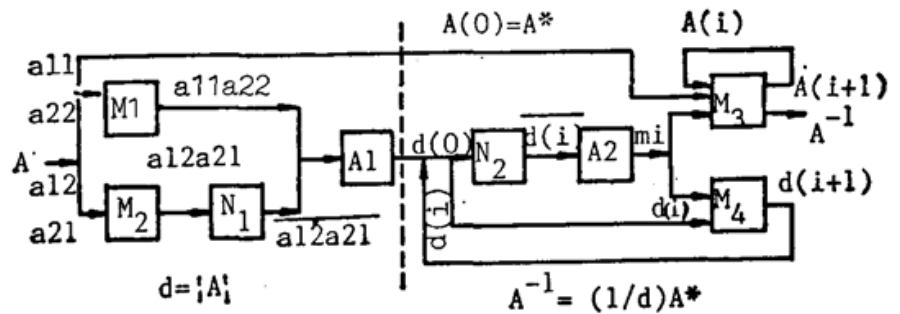


Fig. 4 Computation principle of 2*2 matrix inversion

列的乘法因子 $m_i (i=0, 1, \dots, N)$, 使得 $Y \cdot \prod_{i=0}^N m_i \rightarrow 1$, 置 $X_0 = X, Y_0 = Y$, 利用递推式

$$X_{i+1} = X_i \cdot m_i, \tag{8}$$

$$Y_{i+1} = Y_i \cdot m_i, \tag{9}$$

则有

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{X}{Y} = X \cdot \prod_{i=0}^N m_i, \\ m_i &= 2 - Y_{i0} \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

以 2×2 阶矩阵求逆为例，运算原理如图 4 所示，左边用以求 $|A|$ 之值，右边用来求 A^{-1} 。图中， M 表示改进符号数矩阵乘法器(矩阵 \times 常数)； N 表示 2' 补码运算器； A 表示改进符号数加法器。当矩阵 A 的元素长度为 N bit 改进符号数时，经过 N 次叠代便可使 $|A|^{(N)} \rightarrow 1$ ，而 $A^{(N)} \rightarrow A^{-1}$ 。表 1 给出一个改进符号数矩阵求逆实例($N=3$)。

Table 1 A practical example of MSD matrix inversion ($N=3$)

Original matrix: $A = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.5 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}_D = \begin{pmatrix} 0.01 & 0.10 \\ 0.01 & 0.10 \end{pmatrix}_{msd}$

Accompany matrix: $A^* = \begin{pmatrix} 0.10 & 0.10 \\ 0.01 & 0.01 \end{pmatrix}_{msd} = A^{(0)}$

$d = |A| = (0.25)_D = (0.01)_{msd} = d^{(0)}$

Iteration step(i)	m_i	$d^{(i)}$	$A^{(i)}$
	$m_0 = 2 - d^{(0)}$ = 10.00 - 0.01 = (1.11) _{msd} = (1.75) _D	$d^{(1)} = d^{(0)} \cdot m_0$ = 0.01 \times 1.11 = (0.1001) _{msd} = (0.4375) _D	$A^{(1)} = A^{(0)} \cdot m_0$ $\begin{pmatrix} 0.1110 & 0.1110 \\ 0.1001 & 0.1001 \end{pmatrix}_{msd}$ $\begin{pmatrix} 0.875 & -0.875 \\ 0.4375 & 0.4375 \end{pmatrix}_D$
	$m_1 = 2 - d^{(0)} \cdot m_0$ = 10.00 - 0.01 \times 1.11 = (1.1001) _{msd} = (1.5625) _D	$d^{(2)} = d^{(1)} \cdot m_1$ = 0.1001 \times 1.1001 = (0.10101111) _{msd} (0.68359375) _D	$A^{(2)} = A^{(1)} \cdot m_1$ $\begin{pmatrix} 1.0101110 & 1.0101110 \\ 0.10101111 & 0.10101111 \end{pmatrix}_{msd}$ $\begin{pmatrix} 1.3671875 & -1.798828125 \\ 0.899414063 & .899414063 \end{pmatrix}_D$
	$m_2 = 2 - d^{(0)} \cdot m_0 \cdot m_1$ = 10.0000 - 0.0100 \times 1.1100 \times 1.1001 = (1.01010001) _{msd} = (1.31640625) _D	$d^{(3)} = d^{(2)} \cdot m_2$ = 0.1010111 \times 1.01010001 = (0.1110011001) _{msd} (0.899414063)	$A^{(4)} = A^{(3)} \cdot m_3$ $\begin{pmatrix} 1.11111101 & 1.11111101 \\ 0.11111101 & 0.11111101 \end{pmatrix}_{msd}$ $\begin{pmatrix} 1.98046875 & -1.98046875 \\ 0.98828125 & 0.98828125 \end{pmatrix}_D$
	$m_3 = 2 - d^{(0)} \cdot m_0 \cdot m_1 \cdot m_2$ = 10.00000000 - 0.01000000 \times 1.11000000 \times 1.10010000 \times 1.01010001 = (1.0001100110) _{msd} = (1.099609375) _D -----1	$D^{(4)} = d^{(3)} \cdot m_3$ = 0.1110011001 \times 1.0001100110 = (0.1111110101) _{msd} (0.989257813) _D	----- A^{-1}

三、多窗口解码光学符号代换法则用于改进符号数矩阵外积计算

符号代换法则以二维模式的相关识别和传递为基础，是一种并行算法。与布尔逻辑相比它具有并行处理与扇入扇出的优点，它不仅能识别位的状态，而且能识别位的空间分布。对于这种二维算法，显然，用光学方式大大优于用电子处理方式。近年来，光学符号代换法则作为光计算研究中的一种有效算法引起人们极大的重视^[5,6]。为了解决存在的多通道处理问题，作者曾提出过一种所谓的多窗口解码光学符号代换法则^[7]，其实质是通过在识别输出面上设置多窗口的解码掩模，使得那些具有相同移位规则的模式组合能被同时识别出来。设每一输入图形中含有 M 种不同模式，则两个输入图形间共有 M^2 种不同的模式组合，一

般需要 M^2 个独立通道加以识别和代换, 采用多窗口解码光学符号代换法则后, 可将通道数减少

$$P = 2M - 1 \quad (11)$$

个。图 5 和图 6 分别为该法则原理及其相应的光学系统。原理图中示出了五进制乘法运算时的输入, 本位和及进位。

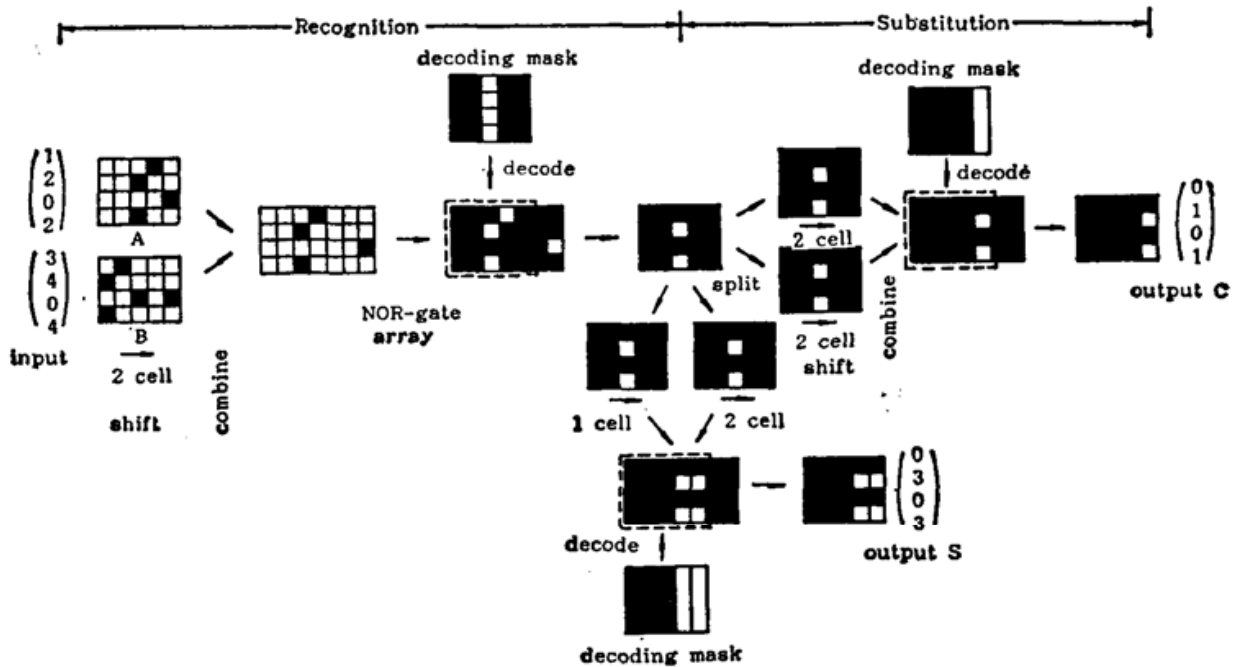


Fig. 5 Principle of MW-OSSR (Input: 2×4 , Sum: 3, Carry: 1)

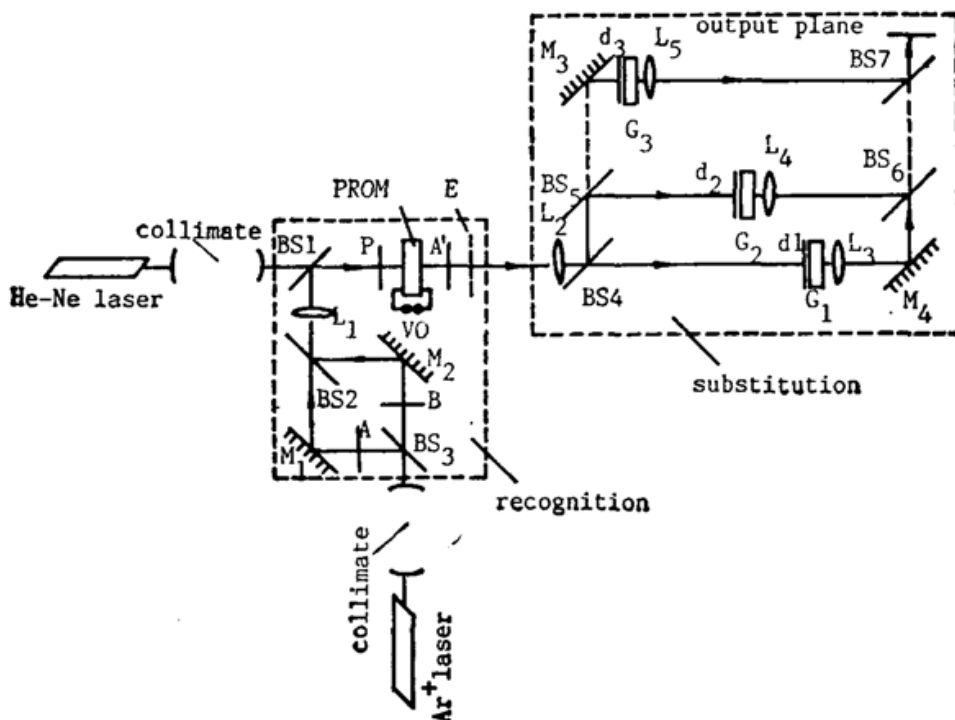


Fig. 6 Optical system for MW-OSSR

显然, A 、 B 两个输入中的 13 和 24 组合由于具有相同的移位规则(间隔相同), 所以被同时得到识别(图中的 NOR 门阵列后)。类似地, A 、 B 间具有相同数值间隔 $d \cdot \Delta x$ ($d = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 的模式组合均可分别被同时识别出来, Δx 表示相邻两数的间隔。图 6 中, A 、 B 分别从四边形光路的两臂输入, 经透镜 L_1 成像及反射镜 M_1 、半透反射镜 BS_1 、 BS_2 移位, 合

成到实时器件 PROM 上(使用波长为 4880 \AA 的 Ar^+ 激光写入)。He-Ne 激光 (6328 \AA) 用来对 PROM 进行读出,由多窗口解码掩模 E 解码后可得到多个识别结果, E 一般由分别位于 P 个代换系统中的 P 个子解码掩模 d_1, d_2, \dots, d_p 来代替。各识别结果在相应的代换通道进行符号代换,由反射镜和半透反射镜或由衍射光栅 $G_1 \sim G_p$ 来完成,它们的输出再次合成后便得到所需的结果。

改进符号数算法中的几种变换规则可以认为是几种符号代换法则,输入图形中含有 9

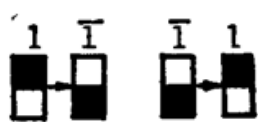


Fig. 7 Dual rail coding

种待识别模式组合: $11, 10, 1\bar{1}, 01, 00, 0\bar{1}, \bar{1}1, \bar{1}0$ 及 $\bar{1}\bar{1}$, 代换结果为 1.0 或 $\bar{1}$ 。实现改进符号数矩阵加减运算时, $M=3, P=5$; 实现改进符号数矩阵外积计算时,考虑到含“0”的模式组合其识别结果在光强上对代换输出不作贡献,则(9)式可改写成

$$P=2(M-2)+1. \quad (M \geq 2) \quad (12)$$

所以,这时所需的通道数为 $P=3$ 。

用光学方法实行改进符号数矩阵外积计算时,首先对操作数进行图 7 所示的二则编码,按多窗口解码光学符号代换法则的原理, $11, \bar{1}\bar{1}$ 模式组合, $1\bar{1}$ 模式组合及 $\bar{1}1$ 模式组合的识别各需一个通道。对同一实例(见图 2),则有

$$A_1 \cdot B_1 = (100010101\bar{1})^T (0100\bar{1}01101)_{MSD}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & \bar{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 & \bar{1} \end{pmatrix}_{MSD}, \quad (13)$$

$$A_2 B_2 = (1100011\bar{1}00)^T (1110010\bar{1}\bar{1}0)_{MSD}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \bar{1} & \bar{1} & 0 \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & 0 & 0 & \bar{1} & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{MSD}. \quad (14)$$

$A_1 B_1$ 及 $A_2 B_2$ 的二则编码结果如图 8 所示,图 9 给出了外积计算时三个识别通道的实

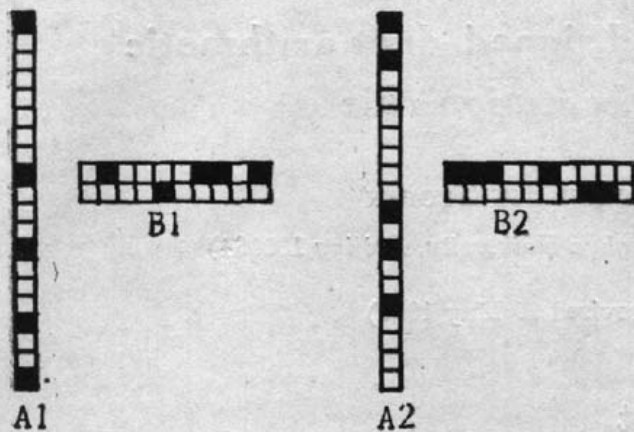


Fig. 8 The dual rial coding results of A1 B1 A2 and B2

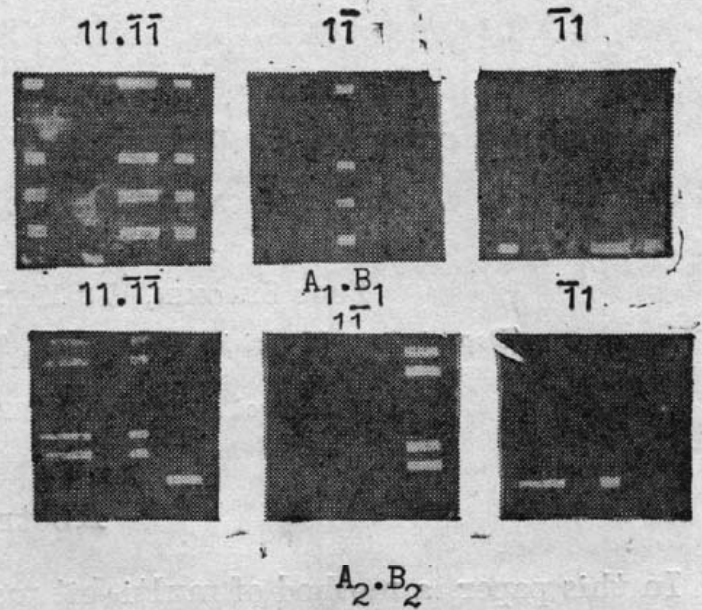


Fig. 9 The experimental results of three recognition channel

验结果。三个识别通道的输出经代换后重叠在一起便可得到部分积阵列。

四、结 论

利用改进符号数算法和多窗口解码光学符号代换法则可以实行快速、高精度的多元多值矩阵计算, 当使用响应时间为 5 ms 的 BSO-PROM 作为 NOR 门阵列(有效口径和实用分辨率分别为 $25 \times 25 \text{ mm}^2$ 和 10 l/mm)时, 系统可实现的等效运算能力是每秒进行 26 次 10×10 阶 32 bit 的改进符号数矩阵加(减); 或 3 次 5×5 阶 8 bit 的改进符号数矩阵相乘; 或 1 次 6×6 阶 8 bit 的改进符号数矩阵求逆。改进符号数数字表达精度 N 决定了最大操作数大小和计算精度, 设整数部分需 $N_1 \text{ bit}$ 表示, 则 $N - N_1 \text{ bit}$ 表示小数部分, 当 $N = 5$, $N_1 = 2$ 时, 计算精度为 0.125; 当 $N = 32$, $N_1 = 16$ 时, 计算精度可达 10^{-5} 。此外, 为了使实际系统小型化, 还可以用体全息片(重铬酸明胶等)和计算机制全息图来代替反射镜、透镜及半透反射镜。

参 考 文 献

- [1] 陈岩松等;《物理》, 1988, 17, No. 10 (Oct), 626~630.
- [2] R. P. Bocker; *Opt. Eng.*, 1984, 23, No. 1 (Jan), 26~33.
- [3] B. L. Drake *et al.*; *Opt. Eng.*, 1986, 25, No. 1 (Jan), 38~43.
- [4] K. Hwang *et al.*; *Opt. Eng.*, 1989, 28, No. 4 (Apr), 364~372.
- [5] K. H. Brenner *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, 25, No. 18 (Sep), 3054~3060.
- [6] 周少敏等;《应用激光联刊》, 1989, 8, No. 4 (Aug), 181~184.
- [7] 周少敏等;《仪器仪表学报》, 1990, 11, No. 1 (Feb), 34~39.

Matrix computing using modified signed-digit arithmetic and optical symbolic substitution rule

ZHOU SHAOMIN, WU MINXIAN AND JIN GUOFAN

(*Department of Precision Instruments, Tsinghua University, Beijing 100084*)

(Received 18 December 1989; revised 29 May 1990)

Abstract

In this paper, a method of multi-bit matrix computation using modified signed-digit (MSD) arithmetic and multi-window decoding optical symbolic substitution rule (MW-OSSR) is proposed. The experimental results of two multi-bit matrix outer product computation are given. This method is of high accuracy and speed.

Key words: modified signed-digit, multi-window decoding optical symbolic substitution, optical matrix computing outer product.