

阶跃型椭圆光纤的色散特性 与几何双折射*

余 守 宪

(北方交通大学 物理系)

提 要

本文采用计算介质波导色散关系的叠代矩量法计算阶跃型椭圆光纤两个基本偏振模式的传播常数、几何双折射及群折射率差。本方法简便、有效,能给出与精确数值计算吻合的结果。

关键词: 光波导, 光纤, 波导色散, 矩量法, 双折射。

一、引 言

计算单模光纤的两个基本偏振模的色散特性以求出模折射率差 $(\beta_x - \beta_y)/k$ 及群折射率差 $(d\beta_x/dk) - (d\beta_y/dk)$,在单模光纤光学及其应用中有重要意义。对阶跃型椭圆光纤,已有各种计算机辅助精确解法(例如,有限元法^[1,2],点匹配法^[3]等等),但这类方法十分繁难,计算工作量甚大。作者曾对用以分析矩形介质波导结构的加权余量法^[4]进行改进,提出了分析矩形介质波导结构的叠代矩量法^[5],及分析任意截面介质波导导模的叠代矩量法^[6,7]。在本文中报道用叠代矩量法计算阶跃型椭圆介质波导几何双折射的结果,并通过实例计算,说明此法结果与有限元法结果相符,有实用价值。

二、阶跃型椭圆介质波导的导模

作为叠代矩量法用于计算非圆截面光纤的一个特例,考虑横截面为椭圆的阶跃型光纤,其半长轴与半短轴分别为 a 与 b ,芯区及包层折射率分别为 n_1 与 n_2 。将坐标尺度扩大到原来的 $k(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 倍。并定义归一化长度 V_1, V_2 及归一化传播常数 P^2 为

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= ak(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, V_2 = bk(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}, \\ P^2 &= \frac{(\beta^2/k^2) - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

于是亥姆霍茨(Helmholtz)方程可以写成^[4]

$$\left. \begin{aligned} H\psi &= P^2\psi, \\ H &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 - D^2, \\ D^2 &= \frac{n_1^2 - n^2}{n_1^2 - n_2^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

收稿日期: 1989年12月18日; 收到修改稿日期: 1990年3月19日

* 本工作得到国家自然科学基金的资助。

在芯区与包层中, D^2 各为 0 与 1。求出最佳分离变量解 $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ 及相应的最优本征值 P^2 。由于对称性, 只需考虑图 1 中所示的第一象限。将椭圆截面的第一象限分为 $N=20$ 个窄长条, 其 x 坐标各为 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$, y 坐标各为 $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{20}$, 如图 1 所示。令

$$\left. \begin{aligned} h_k(x) &= 0, x \in (x_{k-1}, x_k); h_k(x) = 1, x \notin (x_{k-1}, x_k), \\ g_k(y) &= 0, y \in (0, y_k); g_k(y) = 1, y \notin (0, y_k), \\ h_{21}(x) &= 0, x \in (x_{20}, \infty); h_{21}(x) = 1, x \in (0, x_{20}). \\ &k = 1, 2, \dots, 20 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

于是有

$$D^2 = \sum_{k=1}^{20} (1-h_k)g_k + (1-h_{21}) \quad (4)$$

因而可把 D^2 写成

$$D^2 = A^2(x) + B^2(y) - \sum_{k=1}^{20} F_k(x)G_k(y) \quad (5)$$

适当选定 $A^2(x)$ 与 $B^2(y)$, 以使在零级近似(忽略 $F_k(x)G_k(y)$ 各项)中, 亥姆霍茨方程给出“逼近矩形”(或称“等效矩形”)的解^[8], 亦即零级近似中用长宽比及面积与椭圆相等的矩形(边长分别为 $\sqrt{\pi} a$ 及 $\sqrt{\pi} b$)逼近该椭圆。为此, 选取

$$A^2 = (1-h_{19}) + (1-h_{20}) + (1-h_{21}), B^2 = g_9 \quad (6)$$

写出其相应的 $F_k(x)$ 与 $G_k(y)$ 为

$$\left. \begin{aligned} F_k &= -(1-h_k), (k=1, 2, \dots, 8, 10, 11, \dots, 18); F_9 = h_9, \\ G_k &= g_k, (k=1, 2, \dots, 18); F_k = (1-h_k), G_k = (1-g_k), (k=19, 20) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

在零级近似中, 本征值方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 1 - A^2 - B^2 \right) X_0(x)Y_0(y) = P_0^2 X_0(x)Y_0(y) \quad (8)$$

可用分离变量法解得 $X_0(x)$, $Y_0(y)$ 及相应的零级近似传播常数 P_0^2

$$P_0^2 = P_{01}^2 + P_{02}^2 - 1, \quad (9)$$

其中 P_{01} 满足本征值方程

$$\sqrt{1-P_{01}^2} x_{18} = \tan^{-1} \left[c_x \frac{P_{01}}{\sqrt{1-P_{01}^2}} \right] \quad (10)$$

对 E^x 模, $c_x = (n_1/n_2)^2$; 对 E^y 模, $c_x = 1$, 而 P_{02} 满足本征值方程

$$\sqrt{1-P_{02}^2} y_9 = \tan^{-1} \left[c_y \frac{P_{02}}{\sqrt{1-P_{02}^2}} \right] \quad (11)$$

对 E^x 模, $c_y = 1$; 对 E^y 模, $c_y = (n_1/n_2)^2$, 场函数 $X_0(x)$ 及 $Y_0(y)$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} X_0(x) &= \cos(\sqrt{1-P_{01}^2} x), (0, x_{18}) \\ X_0(x) &= c_x \cos(\sqrt{1-P_{01}^2} x_{18}) \exp[-P_{01}(x-x_{18})], (y_9, \infty) \\ Y_0(y) &= \cos(\sqrt{1-P_{02}^2} y), (0, y_9) \\ Y_0(y) &= c_y \cos(\sqrt{1-P_{02}^2} y_9) \exp[-P_{02}(y-y_9)], (y_9, \infty) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

把交叉项 $\sum F_k G_k$ 作为 H 中的微扰项, 将 $\psi(x, y) = X_0(x)Y_0(y)$ 代入变分关系式

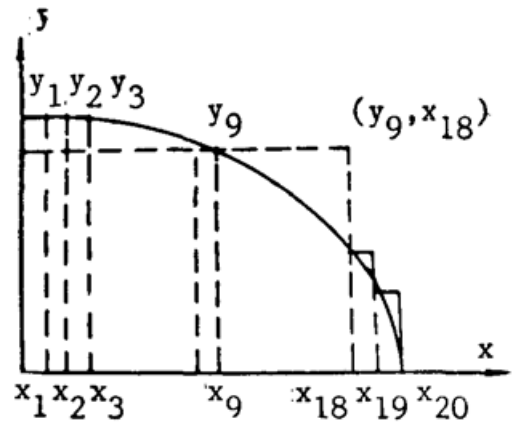


Fig. 1 A quarter of an elliptical waveguide

$$P^2 = \iint \psi H \psi \, dx \, dy / \iint \psi^2 \, dx \, dy, \quad (13)$$

即得出一级近似传播常数 P_1^2 为

$$\left. \begin{aligned} P_1^2 &= P_{01}^2 + P_{02}^2 - 1 + \sum_{k=1}^{20} F_{k0} G_{k0}, \\ F_{k0} &= \int F_k(x) X_0^2(x) \, dx / \int X_0^2(x) \, dx, \\ G_{k0} &= \int G_k(x) Y_0^2(y) \, dy / \int Y_0^2(y) \, dy. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

为求二级近似传播常数 P_2^2 , 可将 $\psi(x, y) = X_0(x)Y_0(y)$ 代入亥姆霍茨方程中, 乘以权函数 $Y_0(y)$, 然后在 $y = -\infty$ 到 $y = +\infty$ 范围内积分, 即得

$$X'' + (P_{02}^2 - P^2 - A^2 + \sum F_k G_{k0}) X = 0. \quad (15)$$

由此解得的 P^2 值即为二级近似传播常数 P_2^2 及 $X(x)$ 的一级近似 $X_1(x)$ 。再将 $\psi(x, y) = X_1(x)Y(y)$ 代入亥姆霍茨方程。仿上述步骤, 即可解得三级近似传播常数 P_3^2 及 $Y(y)$ 的一级近似 $Y_1(y)$, 而场函数的近似解为 $X_1(x)Y_1(y)$; 依此类推, 继续叠代, 以求得更精确的结果。通常, 因叠代过程收敛很快, 二级近似已给出足够精确的结果。

利用上述方法, 可分别求得 E^x 模及 E^y 模的归一化传播常数, 从而得到 β_x 与 β_y 值。令波数 k 取微小增量, 即可由数值微分法得到相应的 $(d\beta_x/dk)$ 及 $(d\beta_y/dk)$ 值。于是, 对于给定的 n_1, n_2, V_1, V_2 即可得到相应的模折射率差及群折射率差。

三、计算实例

为与有限元法的计算机辅助数值解的结果^[2]比较。对 $n_1=1.480$, $n_2=1.470$, 椭圆长短轴比 (a/b) 取不同值的阶跃型椭圆光纤, 计算了归一化几何双折射 $[(\beta_x - \beta_y)/k](n_1 - n_2)^2$ 与归一化长度 $V_2 = bk(n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 的关系曲线, 其结果如图 2 所示。图中虚线与实线分别为叠代矩量法及有限元法的计算结果。图 3 给出几何双折射取最大值 ($\Delta\beta = \Delta\beta_{\max}$) 时的 V_2 值 (记作 $V_{\Delta\beta_{\max}}$) 随长短轴比 (a/b) 而变化的曲线, 虚线与实线分别为叠代矩量法及有限元法的计算结果 (叠代矩量法的计算值是取 $N=40$ 个窄长条求得的)。由图 3 可见, $\overline{\Delta\beta}/(\Delta n)^2$ 值两者相差在 5%~10% 范围内, 考虑到 $\overline{\Delta\beta}$ 的计算结果是一级小量, 应该认为这里的结果是较满意的, 并且已能满足实际要求。图 3 表明, $V_{\Delta\beta_{\max}} \sim (a/b)$ 的变化曲线符合较好, 可以判断最大几何双折射的位置。

对于 $n_1=1.54$, $n_2=1.47$, $(a/b)=2.5, 1.7$ 及 1.1 的阶跃型椭圆光纤, 分别计算了相应于两个基模 (E_y^y 及 E_y^x) 的群折射率差 $[(d\beta_y/dk) - (d\beta_x/dk)]$ 与归一化长度 $V_2 = bk \cdot (n_1^2 - n_2^2)^{1/2}$ 之间的关系曲线, 如图 4 所示, 图 4 中虚线与实线分别相应于叠代矩量法与有限元法的计算结果^[2]由图可见, $(n_y^y - n_y^x)$ 的极值位置, $(n_y^y - n_y^x) = 0$ 所相应的 V_2 值相符较好, 而两法的计算结果在远截止区符合较好, 近截止区相差稍大, 但对实际估算, 已能满足要求。

总之, 叠代矩量法的计算结果与有限元法计算结果相符的, 而用叠代矩量法可以较简便地求得较满意的结果, 计算工作量及编程序工作量均较小, 用可编程的袖珍计算器 (例如, PC-1500) 即可进行。本文说明叠代矩量法是有效的、有较广泛的适用性。

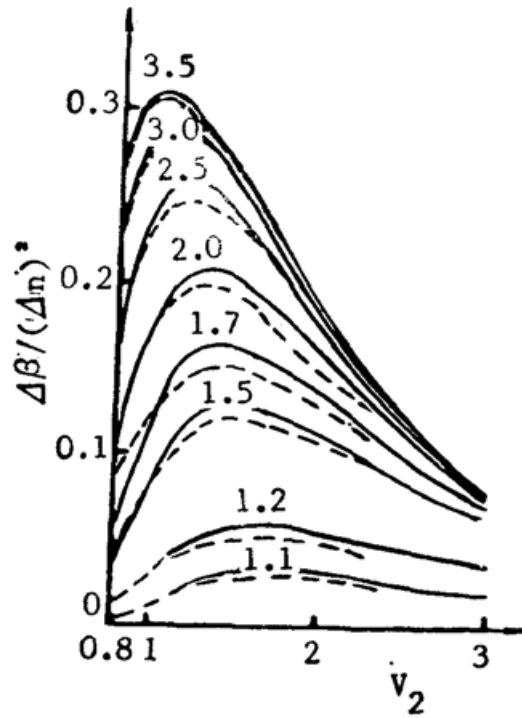


Fig. 2 Variation of $\Delta\beta/(\Delta n)^2$ as a function of normalized length for waveguides having $n_1=1.48$, $n_2=1.47$ and different values of a/b . Solid curves correspond to Dyott et al., while dashed curves correspond to the present method

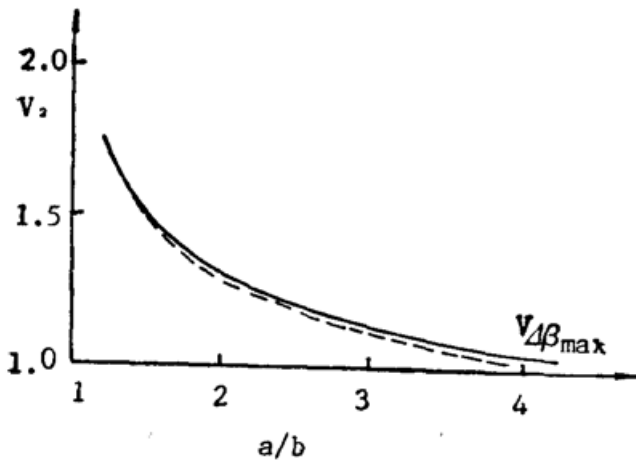


Fig. 3 Normalized propagation constant corresponding to maximum $|\Delta\beta|$ against aspect ratio a/b , $n_1=1.48$, $n_2=1.47$. Solid curve corresponds to Dyott et al., while dashed curve corresponds to the present method

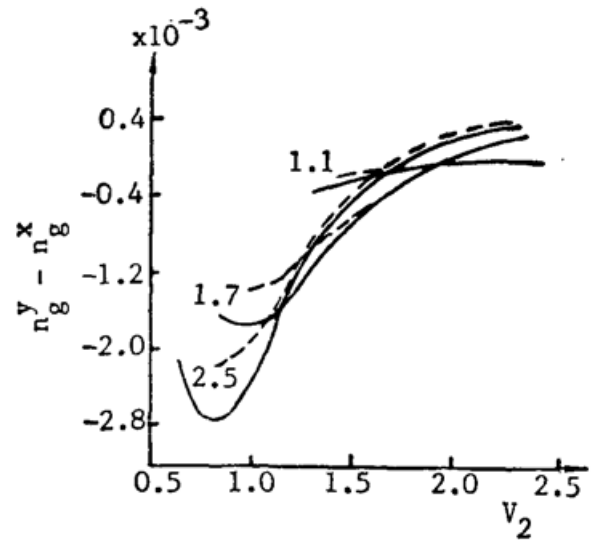


Fig. 4 Variation of group index difference $d\beta_y/dk - d\beta_x/dk$ corresponding to the two fundamental modes E_y^0 and E_x^0 as a function of V_2 for waveguides having $n_1=1.54$ and $n_2=1.47$, $a/b=1.1, 1.7$ and 2.5

参 考 文 献

- [1] C. Yeh, K. Ha *et al.*; *Appl. Opt.*, 1979, **18**, No. 10 (15 May), 1490~1504.
- [2] R. B. Dyott, J. R. Cozens *et al.*; *Electron. Lett.*, 1979, **15**, 380~382.
- [3] E. Yamashita, K. Atsuki *et al.*; *IEEE Trans. Microwave Theory & Techn.*, 1979, **MTT-27**, No. 4 (Apr), 352~356.
- [4] 余守宪;《光学学报》, 1987, **7**, No. 6 (Jun), 544~554.
- [5] She Shouxian; *Opt. & Quant. Electron.*, 1988, **20**, No. 2 (Feb), 125~136.
- [6] 余守宪;《光学学报》, 1989, **9**, No. 2 (Feb), 124~127.
- [7] She Shouxian; *J. O. S. A. (A)*, 1989, **6**, No. 7 (Jul), 1031~1036.
- [8] A. Kumar, R. K. Varshney; *Opt. & Quant. Electron.*, 1984, **16**, No. 4 (Jul), 349~354.

Dispersion characteristics and geometrical birefringence of step-index elliptical fiber

SHE SHOUXIAN

(Department of Physics, Northern Jiaotong University, Beijing)

(Received 18 December 1989; revised 19 March 1990)

Abstract

An iterated moment method for dielectric waveguides of arbitrary cross section is applied to the calculation of propagation constants of the two fundamental polarization modes and geometrical birefringence in step-index elliptical fiber. The method is simple and efficient and gives the results in agreement with computer-aided numerical methods.

Key words: optical waveguide; fiber optics; waveguide dispersion; moment method; birefringence.