

# 薄光栅振幅传输理论的开拓

鄂 国 铨

(北京工业大学 应用物理系)

## 提 要

基于与 Kogelnik 同样的物理模型,但是用薄光栅的振幅传输理论,得到了与 Kogelnik 相同的耦合波方程。所以说这一开拓方法将薄光栅与厚光栅的两种理论联系起来。

关键词: 光栅,振幅传输,衍射,耦合波方程。

## 一、前 言

Moraham 和 Gaylord 在文献[1]中对各类型介质光栅(包括薄的与厚的)的理论及应用作了综合评述,文章涉及四百余篇文献,特别对有关的各种理论(包括严格的与近似的)进行了归纳和比较,并且说明了它们之间的关系。详见文献[1]的图 9,在此只将其中的一部分摘绘如图 1 所示。本文将论述:如何由薄光栅的振幅传输理论过渡到厚光栅的 Kogelnik 双波耦合波理论。

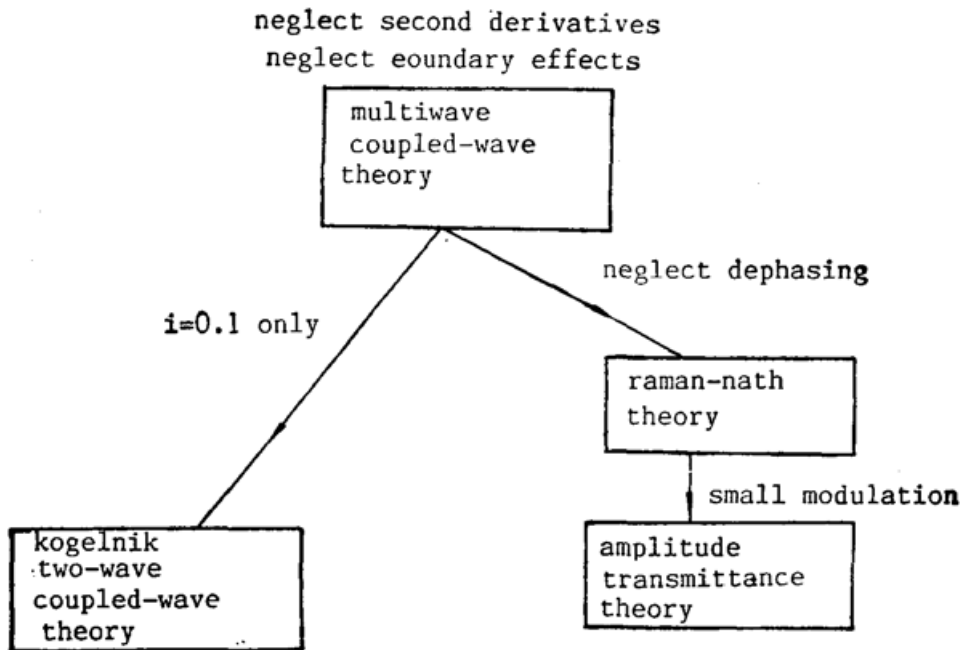


Fig. 1 Relationships between various grating diffraction theories

## 二、振幅传输理论的开拓

如图 2(a), 它是一个厚度很薄的或称之为有单位厚度的平面位相光栅, 设它对入射光

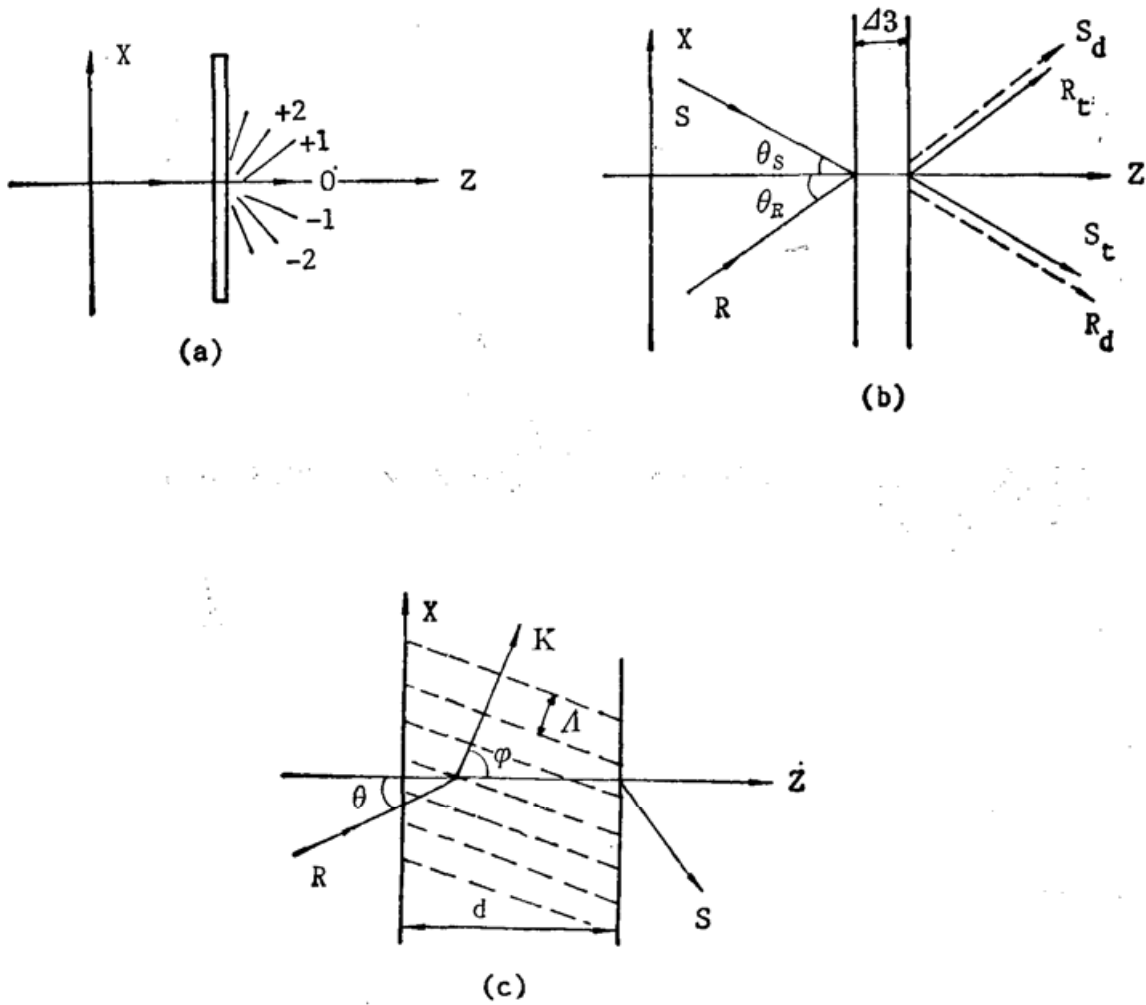


Fig. 2 Three gratings in terms of grating thickness

波的调制作用,可表达为

$$T_a = \exp\{-[\alpha + (\alpha_1 + i\beta_1) \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X})]\}, \quad (1)$$

式中  $\alpha$  和  $\alpha_1$  分别为光栅介质的吸收系数和吸收系数的空间调制; 其中  $\beta_1 = (2\pi n_1/\lambda)$ ,  $\lambda$  为光波波长,  $n_1$  为折射率的调制;  $\mathbf{K}$  为光栅矢量,  $|\mathbf{K}| = (2\pi/\Lambda)$ ,  $\Lambda$  为光栅周期,  $\mathbf{X}$  为向径矢量。按文献[1]V-H 节的讨论,它属于喇曼-奈斯(Raman-Nath)的衍射体制,它包含有众多阶次的衍射光束,通常的处理方法是(1)式展成贝塞耳函数的级数,然后再利用正交关系,从而得到衍射振幅的解析表达式。

如图 2(b),它是一个厚度为  $\Delta z$  的平面位相光栅,而  $\Delta z$  满足文献[1]的(90)式

$$\frac{\Delta z}{\Lambda} < 10, \quad (2)$$

类似于(1)式,相应图 2(b)的光栅而言,它对入射光波的调制作用,可表达为

$$T_b = \exp\{-[\alpha + (\alpha_1 + i\beta_1) \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X})]\} \frac{\Delta z}{\cos \theta}. \quad (3)$$

设有光束  $R \exp(-i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{X})$  入射到这个光栅的左侧,其中  $\boldsymbol{\rho}$  为  $R$  光束的波矢;在它的右侧仍然有众多的衍射阶次,但只有满足文献[2]的(11)式

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{K} \quad (4)$$

的衍射光束,记为  $S \exp(-i\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{X})$ ,而  $\boldsymbol{\sigma}$  为  $S$  光束的波矢,才有最大的衍射效率,称(4)式为布喇格条件;根据(4)式,按文献[2]的(13)式又有下式

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_x \\ 0 \\ \rho_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \sin \theta_R \\ 0 \\ \cos \theta_R \end{bmatrix}; \quad \sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ 0 \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \sin \theta_S \\ 0 \\ \cos \theta_S \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} \sin \theta_R - \frac{K}{\beta} \sin \phi \\ 0 \\ \cos \theta_R - \frac{K}{\beta} \cos \phi \end{bmatrix}, \quad (5)$$

而  $\beta = (2\pi n/\lambda)$ ,  $n$  为光栅介质的平均折射率。随着对(4)式的偏离, 其它衍射阶次的衍射效率将会下降, 但是并不敏感。为此引入对布喇格效应的偏离量  $\Delta K$ , 于是有下式

$$\rho - \sigma = K + \Delta K. \quad (6)$$

如果只考虑满足(4)式的衍射光束, 那么就不必需将(3)式, 类似(1)式那样, 去展成贝塞耳函数的级数, 而只需注意到小调制假定, 亦即  $\beta_1$  和  $\alpha_1$  均为小量, 将(3)式展成幂级数, 取一级近似后整理成

$$T_b = \left(1 - \frac{\alpha}{\cos \theta}\right) \Delta z - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta} [\exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) + \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{X})] \Delta z, \quad (7)$$

现在设想只有两束光束, 分别为  $R$  光束和  $S$  光束, 各以  $\theta_R$  和  $\theta_S$  角入射到图 2(b) 光栅的左侧, 再限定  $R$  光束和  $S$  光束的波矢  $\rho$  和  $\sigma$  满足(6)式, 于是在这个光栅的右侧, 分别有衍射光束, 记为  $RT_b$  和  $ST_b$ , 利用(6)式和(7)式可导出下式

$$\left. \begin{aligned} RT_b &= T_b R \exp(-i\rho \cdot \mathbf{X}) = \left(1 - \frac{\alpha}{\cos \theta_R}\right) \Delta z R \exp(-i\rho \cdot \mathbf{X}) \\ &\quad - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta_R} \Delta z R \exp[-i(\sigma + \Delta K) \cdot \mathbf{X}] = R_t + R_d, \\ ST_b &= T_b S \exp(-i\sigma \cdot \mathbf{X}) = \left(1 - \frac{\alpha}{\cos \theta_S}\right) \Delta z S \exp(-i\sigma \cdot \mathbf{X}) \\ &\quad - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta_S} \Delta z S \exp[-i(\rho - \Delta K) \cdot \mathbf{X}] = S_t + S_d. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

在(8)式的推导过程中, 已将等号右方不满足(6)式条件的那一项略去了。显然(8)式中的  $R_t$  和  $S_t$  分别为  $R$  光束和  $S$  光束直接传输通过图 2(b) 光栅后的光束; 而  $R_d$  和  $S_d$  分别相应于被光栅按(6)式所衍射形成的光束。特别要指出:  $R_d$  和  $S_d$  的波矢  $(\sigma + \Delta K)$  和  $(\rho - \Delta K)$ , 分别与  $S$  光束和  $R$  光束的波矢  $\sigma$  和  $\rho$  相对应。因此, (8)式的物理意义就是:  $R$  光束和  $S$  光束共同在(6)式的制约下, 通过图 2(b) 光栅后, 相互之间的转化与耦合。

如图 2(c), 它是一个厚度为  $d$  的厚光栅, 它满足文献[1]的(91)式

$$\frac{d}{\Lambda} > 10, \quad (9)$$

当入射光束  $R \exp(-i\rho \cdot \mathbf{X})$  满足(4)式时, 则衍射光束  $S \exp(i\sigma \cdot \mathbf{X})$  有最大的衍射效率, 而随着对(4)式的偏离, 其它阶次的衍射效率明显下降, 并且十分敏感。这正是与图 2(b) 光栅的不同之处。

自然, 可将图 2(c) 的光栅分割成许多厚度为  $\Delta z$  的薄光栅, 令其中每一个  $\Delta z$  均满足(2)式; 同样设想只有两个满足(6)式的光束  $R$  和  $S$ , 依次顺序逐个地由左向右通过每一个薄光栅, 那么按照上述对(8)式物理意义的分析, 以及对图 2(b) 的直观理解。将(8)式中  $R_d, R_t, S_d, S_t$  表达式代入上式, 再令  $\Delta z \rightarrow 0$ , 就可推导出

$$\frac{1}{\cos \theta_R} \frac{dR}{dz} = -\frac{\alpha}{\cos^2 \theta_R} R - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta_R \cos \theta_S} S \exp(i\Delta K \cdot \mathbf{X}), \quad (10)$$

$$\frac{1}{\cos \theta_S} \frac{dS}{dz} = -\frac{\alpha}{\cos^2 \theta_S} S - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta_S \cos \theta_R} R \exp(-i\Delta\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}). \quad (11)$$

上述(10)式和(11)式就是图 2(e)厚光栅的传输型耦合波微分方程。

相应于反射型的衍射光束而言,按照(8)式及对图 2(b)的直观分析,经过完全类似的推导,可得

$$-\frac{1}{\cos \theta_S} \frac{dS}{dz} = -\frac{\alpha}{\cos^2 \theta_S} S - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta_S \cos \theta_R} R \exp(-i\Delta\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}). \quad (12)$$

上述(10)式和(12)式就是反射型耦合波微分方程。

如果将(10)式乘以  $R$  的共轭  $R^*$ ,将(11)式乘以  $S$  的共轭  $S^*$ ,可得到两个方程;对这两个方程再分别取共轭,又得到另外两个方程。将以上四个方程相加后,整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\cos \theta_R} \frac{d}{dz} (RR^*) + \frac{1}{\cos \theta_S} \frac{d}{dz} (SS^*) \\ &= -\frac{\alpha_1}{\cos \theta_R \cos \theta_S} [SR^* \cos(\Delta\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) + S^*R \cos(\Delta\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}) \\ & \quad - 2\alpha \left[ \frac{RR^*}{\cos^2 \theta_R} - \frac{SS^*}{\cos^2 \theta_S} \right]]. \end{aligned} \quad (13)$$

上式就是能量平衡关系式。(13)式等号左方表示:两光束各自的能量在通过光栅时,分别沿各自传播方向的变化率之总合;等号右方表示:光栅介质的吸收系数(平均的和调制的)所造成的欧姆损耗。

### 三、比较与讨论

Kogelnik 对图 2(e)厚光栅作过精细的研究<sup>[2]</sup>,可以证实,当  $\Delta\mathbf{K}=0$  及  $\phi=\pi/2$  时,亦即在严格满足(4)式并且  $\mathbf{K}$  平行光栅表面的条件下,此时按(5)式有  $\cos \theta_R = \cos \theta_S = \cos \theta$ 。于是本文的(10)、(11)两式与文献[2]的(21)、(22)两式,均可简化成如下完全相同的形式

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dz} &= -\frac{\alpha}{\cos \theta} R - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta} S, \\ \frac{dS}{dz} &= -\frac{\alpha}{\cos \theta} S - \frac{\alpha_1 + i\beta_1}{2 \cos \theta} R. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

又知在上述条件下,本文的(13)式与文献[2]的(24)式,也均可简化成如下完全相同的形式

$$\frac{d}{dz} [RR^* + SS^*] = -\frac{2\alpha}{\cos \theta} [RR^* + SS^*] - \frac{\alpha_1}{\cos \theta} [RS^* + R^*S]. \quad (15)$$

为了求解耦合波方程,取用文献[2]的(31)式和(35)式,亦即取图 2(e)光栅的边界条件为

传输型:

$$R(0) = 1, \quad S(0) = 0, \quad (16)$$

反射型:

$$R(0) = 1, \quad S(d) = 0. \quad (17)$$

若将式(14)略去欧姆损耗,则(14)式化为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dz} &= -\frac{i\beta_1}{2\cos\theta} S, \\ \frac{dS}{dz} &= -\frac{i\beta_1}{2\cos\theta} R_0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

上式对应于传输型;完全类似地由(10)、(12)式,在相同的简化条件下,可导出

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR}{dz} &= -\frac{i\beta}{2\cos\theta} S, \\ \frac{dS}{dz} &= \frac{i\beta_1}{2\cos\theta} R_0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式对应于反射型。

按文献[2]的(40)式定义衍射效率为

$$\eta = \frac{\cos\theta_R}{\cos\theta_S} S S^*$$

当  $\Delta K=0$  及  $\phi=\pi/2$  时,有

$$\eta = |S|^2. \quad (20)$$

将(16)、(18)、(20)三式联立,可解出

$$\eta = \sin^2\left(\frac{\beta_1 d}{2\cos\theta}\right). \quad (21)$$

将(17)、(19)、(20)三式联立,可解出

$$\eta = \text{th}^2\left(\frac{\beta_1 d}{2\cos\theta}\right). \quad (22)$$

(21)式和(22)式分别对应于传输型和反射型,并且同样可证实,(21)式与(22)式分别与文献[2]的(45)式和(59)式完全相同。

## 四、结 论

(1) 文献[2]的(7)、(10)两式如下

$$\frac{2\pi n}{\lambda} \gg \alpha; \quad \frac{2\pi n}{\lambda} \gg \alpha_1; \quad n \gg n_1, \quad (23)$$

$$E = R(z)\exp(-i\rho \cdot \mathbf{X}) + S(z)\exp(-i\sigma \cdot \mathbf{X}), \quad (24)$$

文献[2]的(11)式就是本文的(4)式,实际上本文的(23)、(24)、(4)三式是文献[2]的前提假定,亦即是物理模型。其中(23)式称为弱耦合假定,它相当于本文图1中振幅传输理论的前提,即小调制假定;(24)式称为双波耦合假定,它相当于本文(8)式的前提条件;而(4)式乃是联系与制约  $R$  光束和  $S$  光束的条件,它也包含在(8)式的前提条件之内了。所以说,本文的物理模型与文献[2]是相同的。

(2) 文献[2]的(1)式,即标量波动方程

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 E + k^2 E &= 0, \\ k^2 &= \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - i\omega\mu\sigma \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}), \quad \sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{X}), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

上述(25)式可称之为文献[2]的出发方程;但是本文的出发方程是本文的(3)式,可称之为厚

度为  $\Delta z$  的薄光栅的振幅传输表达式, 且  $\Delta z$  满足本文(2)式的条件, 在考虑了弱耦合假定之后, (3)式转化为推导(8)式时所使用的(7)式, 简言之, 本文用(3)式取代了(25)式。所以说, 本文的出发方程与文献[2]是不相同的。

(3) 从推导过程来分析比较, 文献[2]将(6)、(24)、(25)三式相结合, 推导出下式

$$\left. \begin{aligned} R'' - 2iR'\rho_s - 2i\alpha\beta R + 2C\beta S &= 0, \\ S'' - 2iS'\sigma_s - 2i\alpha\beta S + (\beta^2 - \sigma^2)S + 2C\beta R &= 0, \\ C = \frac{\sigma n_1}{\lambda} - i\frac{\alpha_1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

这相当于本文由(6)、(7)两式推导出(8)式, 进一步再推导出(10)、(11)两式。所以说, 本文的推导思路与文献[2]是相似的、一致的。

(4) 诚然, 文献[2]由(25)式出发是比较严格的, 也给出了几种不同情况下衍射效率的公式和曲线, 确实颇为精彩。但在导出(26)式后, 文献[2]再次应用弱耦合的前提假定, 又略去了(26)式中二阶导数项  $R''$  和  $S''$ , 导出文献[2]的(21)、(22)式, 实际上就是又回到了本文(10)、(11)两式所描述的物理状况, 从而才能在  $\Delta K=0$  和  $\phi=\pi/2$  的条件下, 使得本文与文献[2]共同得到了形式完全相同的(14)式。所以说, 将薄光栅振幅传输理论开拓应用去处理厚光栅, 其特点就是方法的简捷与物理图像的直观。

## Prolongation for amplitude transmittance theory of thin-gratings

E GUO GUANG

(Beijing Polytechnical University)

(Received 15 March 1990; revised 26 April 1990)

### Abstract

Based on same physical model as Kogelnik but using Amplitude Transmittance Theory of thin-gratings, the same coupled wave equation as Kogelnik is presented for Thick Hologram Gratings. Therefore, this prolongation method is a connective path between Thin and Thick grating theory.

**words:** grating; amplitude transmittance; diffraction; coupled wave equation.