

# 多光子 Jaynes-Cummings 模型的演化\*

周 鹏

(湖北教育学院 物理系, 武汉)

彭 金 生

(华中师范大学 物理系, 武汉)

## 提 要

本文研究了任意初态的多光子 Jaynes-Cummings 模型的一般演化规律。应用到具体问题, 讨论了一个二能级原子与相干光场相互作用的双光子 Jaynes-Cummings 模型的量子统计性质。

关键词: 多光子 Jaynes-Cummings 模型, 量子统计性质。

## 一、引 言

Jaynes-Cummings (以下简称 J-C) 模型<sup>[1]</sup> 是反映物质与辐射场相互作用的精确可解的理想模型。关于它的理论研究, 揭示了许多非常有意义的效应<sup>[2~7]</sup>。最近, Rempe 等人利用高 Q 微波腔中 Rydberg 原子与辐射场的相互作用在实验上获得了 J-C 模型<sup>[8]</sup>, 并观测到了原子反转的量子崩溃和回复 (Collapse and revival) 现象。这使得人们对 J-C 模型的理论研究不再仅仅只具有学术上的意义。

本文借助于时间演化算符, 精确的求解了任意初态的多光子 J-C 模型的一般演化规律。应用到具体问题, 详细讨论了初始处于基态的二能级原子与一单模相干光场相互作用的双光子 J-C 模型在共振情况下的量子统计性质, 揭示了原子反转的周期崩溃和回复效应, 光子的反聚束效应, 原子和光场的压缩效应等。

## 二、多光子 J-C 模型

我们考虑一个二能级原子通过多光子跃迁与一单模辐射场相互耦合的系统, 如图 1 所示。如果二能级原子的能量算符和跃迁算符分别用  $s_3$  和  $s_{\pm}$  表示; 辐射场用光子的产生算符  $a^+$  和消灭算符  $a$  表示, 则系统的 Hamiltonian 在旋波近似 (Rotating Wave Approximation) 下, 可表成<sup>[1]</sup>:

$$H = \omega a^+ a + \omega_0 s_3 + g(s_+ a^K + a^{+K} s_-) \quad (\hbar = 1), \quad (1)$$

式中  $\omega$  是辐射场的频移;  $\omega_0$  是二能级原子的跃迁频率,  $g$  是原子与辐射场的耦合常数;  $K$  是原子跃迁过程中吸收或发射的光子数。

如果二能级原子的基态  $|-\rangle$  和激发态  $|+\rangle$  取以下形式:

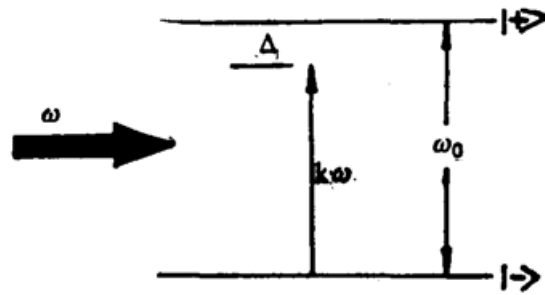


Fig. 1 A two-level atom interacting a single-mode radiation field via the  $k$ -photon process

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

则相应的原子算符可用 Pauli 矩阵表述:

$$s_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

### 三、多光子 J-C 模型的演化规律

若把 Hamiltonian(1)式分解为

$$H = H_0 + H_1, \quad (4)$$

这里,

$$H_0 = \omega(a^\dagger a + K s_3), \quad (5)$$

$$H_1 = (\omega_0 - K\omega)s_3 + g(s_+ a^K + a^{+K} s_-). \quad (6)$$

不难看出:

$$[H_0, H_1] = 0. \quad (7)$$

则系统的时间演化算符  $u(t) = e^{-iHt}$  可分解为:

$$u(t) = u_0(t)u_1(t). \quad (8)$$

其中:

$$u_0(t) = e^{-iH_0 t}, \quad (9)$$

$$u_1(t) = e^{-iH_1 t}. \quad (10)$$

经过简单运算, 可以很容易求出:

$$u_0(t) = \begin{pmatrix} e^{-i\omega(a^\dagger a + \frac{K}{2})t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega(a^\dagger a - \frac{K}{2})t} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$u_1(t) = \begin{pmatrix} \cos At - i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin At}{A} & -ig\alpha^\kappa \frac{\sin Bt}{B} \\ -ig\alpha^{+\kappa} \frac{\sin At}{A} & \cos Bt + i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin Bt}{B} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

这里

$$\Delta = \omega_0 - K\omega \quad (\text{失谐量}),$$

$$A = \left[ \left( \frac{\Delta}{2} \right)^2 + g^2 a^K a^{+K} \right]^{1/2},$$

$$B = \left[ \left( \frac{\Delta}{2} \right)^2 + g^2 a^{+K} a^K \right]^{1/2}.$$

如果在最初时刻 ( $t=0$ ), 辐射场为任意态:

$$|R(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} F_n |n\rangle. \quad (13)$$

这里  $|n\rangle$  为光子数本征态,  $F_n$  为具有  $n$  个光子数的几率幅, 它满足归一化条件:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |F_n|^2 = 1.$$

对于不同的辐射场,  $F_n$  取不同的形式<sup>[9]</sup>.

原子初始处在基态和激发态的相干叠加态:

$$|A(0)\rangle = \begin{pmatrix} r_+ \\ r_- \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其中  $r_+$  和  $r_-$  分别代表原子处在激发态和基态的几率幅, 它们满足  $|r_+|^2 + |r_-|^2 = 1$ .

则多光子 J-C 模型在  $t=0$  时刻的态, 可以表为:

$$|\varphi(0)\rangle = |A(0)\rangle \otimes |R(0)\rangle. \quad (15)$$

系统以此态开始, 演化到任意时刻  $t$  的状态可以借助于时间演化算符  $u(t)$  而求得:

$$|\varphi(t)\rangle = u(t) |\varphi(0)\rangle = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

这里:

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} r_+ F_n e^{-i(n+\frac{K}{2})\omega t} \left( \cos \Omega_n^+ t - i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \Omega_n^+ t}{\Omega_n^+} \right) |n\rangle$$

$$- i \sum_{n=K}^{\infty} g r_- F_n e^{-i(n-\frac{K}{2})\omega t} \left[ \frac{n!}{(n-K)!} \right]^{1/2} \frac{\sin \Omega_n^- t}{\Omega_n^-} |n-K\rangle, \quad (17)$$

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{-i n \omega t} \left\{ r_- e^{i\frac{K}{2}\omega t} \left[ \cos \Omega_n^- t + i \frac{\Delta}{2} \frac{\sin \Omega_n^- t}{\Omega_n^-} \right] |n\rangle \right.$$

$$\left. - i g r_+ e^{-i\frac{K}{2}\omega t} \left[ \frac{(n+K)!}{n!} \right]^{1/2} \frac{\sin \Omega_n^+ t}{\Omega_n^+} |n+K\rangle \right\}. \quad (18)$$

其中:

$$\Omega_n^+ = \left[ \left( \frac{\Delta}{2} \right)^2 + g^2 \frac{(n+K)!}{n!} \right]^{1/2}, \quad (19)$$

$$\Omega_n^- = \left[ \left( \frac{\Delta}{2} \right)^2 + g^2 \frac{n!}{(n+K)!} \right]^{1/2}, \quad (20)$$

是与原子的 Rabi 频率有关的参数。

根据量子力学原理可知: 如果一个系统  $t$  时刻的状态波函数已知, 则这个系统的演化规律便可确定下来, 相应的各力学量的动力学行为和统计特征也可以很容易给出。对于我们所讨论的系统, 由于(16)~(20)式是由任意初态演化而来的, 同时计及了失谐量  $\Delta$ , 耦合常数  $g$  和  $K$  光子跃迁过程等因素的影响, 因而(16)~(20)式反映了一般多光子 J-C 模型的演化规律。对于具体问题, 只需要选定  $K$  值, 以及根据初态定出  $F_n$ ,  $r_+$  和  $r_-$  等参数, 进而给出系统  $t$  时刻的态函数, 就可以对系统进行全面研究。下面研究一个具体例子。

#### 四、二能级原子与相干光场的双光子相互作用

考虑一初始处于基态的二能级原子与一束单模相干光场的双光子相互作用。对这样的初态而言。

$$\left. \begin{aligned} r_+ &= 0; & r_- &= 1 \\ F_n &= e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \end{aligned} \right\} \circ \quad (21)$$

式中  $\alpha = \bar{n}_c^{1/2} e^{i\phi}$ ;  $\bar{n}_c$  是初始相干光场的平均光子数,  $\phi$  是  $\alpha$  的相位角 ( $0 \leq \phi \leq 2\pi$ )。

对于这里所研究的系统,  $K=2$ ; 连同(21)式一并代(16)~(20)式, 在共振情况下( $\Delta=0$ ), 系统  $t$  时刻的态函数由下式表述:

$$|\varphi(t)\rangle = \left( \begin{aligned} & -ie^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n-1)\omega t} \sin \sqrt{n(n-1)} gt |n-2\rangle \\ & e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n-1)\omega t} \cos \sqrt{n(n-1)} gt |n\rangle \end{aligned} \right) \circ \quad (22)$$

相应地, 下列算符的平均值不难求出:

$$\begin{aligned} \langle s_3 \rangle &= \langle \varphi(t) | s_3 | \varphi(t) \rangle \\ &= -\frac{1}{2} e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos 2\sqrt{n(n-1)} gt, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \langle s_+ \rangle &= ie^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{\sqrt{n!(n+2)!}} e^{-i2(\phi-\omega t)} \\ &\quad \times \sin \sqrt{(n+1)(n+2)} gt \cos \sqrt{n(n-1)} gt, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= e^{-|\alpha|^2} e^{i(\phi-\omega t)} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}} \sin \sqrt{n(n+1)} gt \right. \\ &\quad \left. \times \sin \sqrt{n(n-1)} gt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n+1}}{n!} \cos \sqrt{n(n+1)} gt \cos \sqrt{n(n-1)} gt \right], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \langle a^2 \rangle &= e^{-|\alpha|^2} e^{i2(\phi-\omega t)} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{n!} \sqrt{\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}} \sin \sqrt{(n+1)(n+2)} gt \right. \\ &\quad \times \sin \sqrt{n(n-1)} gt + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2(n+1)}}{n!} \cos \sqrt{(n+1)(n+2)} gt \\ &\quad \left. \times \cos \sqrt{n(n-1)} gt \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\langle a^\dagger a \rangle = |\alpha|^2 - 1 + e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \cos 2\sqrt{n(n-1)} gt, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \langle a^{\dagger 2} a^2 \rangle &= |\alpha|^4 - 2|\alpha|^2 + 3 + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} (2n-3) \\ &\quad \times \cos 2\sqrt{n(n-1)} gt. \end{aligned} \quad (28)$$

有了以上表达式, 便可以对系统的动力学行为和统计特性进行全面的研究:

##### 1. 原子反转的崩溃和回复效应

原子反转  $\langle s_3 \rangle$  反映了原子的动力学行为, 它由(23)式表述. 实际上, 给出  $\langle s_3 \rangle$  的一般解析表达式是困难的, 但借助于数值计算可以形象地展示原子反转的演化规律, 如图 2 所示。

当初始平均光子数  $\bar{n}_0$  较小(如图 2a)时, 原子反转呈现无规则振荡; 但当  $\bar{n}_0$  较大(如图 2b, 2c)时, 原子反转的演化呈明显的规律性, 即崩溃-回复效应<sup>[7]</sup>。崩溃与回复交替进行, 相邻崩溃形状互相倒置, 崩溃时间随  $\bar{n}_0$  增加而减小, 但回复时间则与  $\bar{n}_0$  无关,  $T_r = \pi/g$ , 这些特征与单光子 J-C 模型中原子反转的崩溃-回复效应<sup>[20]</sup> 是不完全一致的。

值得指出的是, 辐射场的平均光子数  $\langle a^\dagger a \rangle$  也呈现与原子反转相同的崩溃-回复现象, 只不过二者形状相互倒向。事实上, 这一结论是由于系统总的“激发数”(Excitation Number)  $N = a^\dagger a + 2s_3 + 1$  守恒的结果。

### 2. 原子的压缩效应

为反映原子的压缩特性, 并和实际测量对应, 我们定义两个缓变的相互正交的厄米算符:

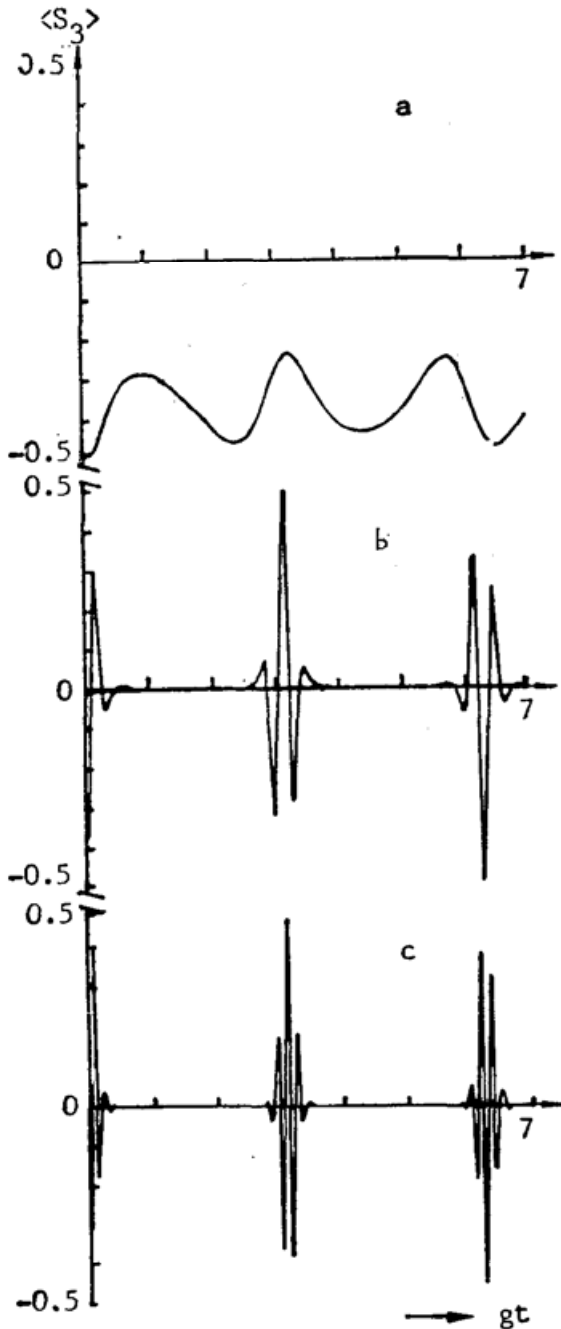


Fig. 2  $\langle s_3 \rangle$  vs  $gt$  for  $\bar{n}_0 = 1$  (a), 10 (b), and 20 (c)

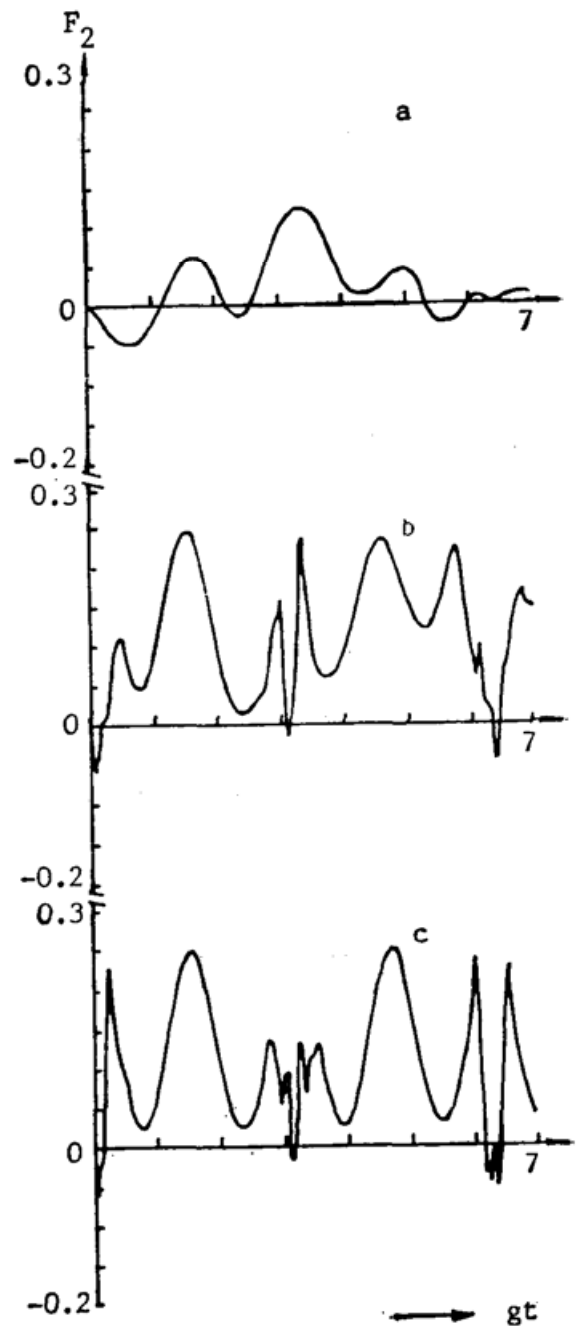


Fig. 3  $F_2$  vs  $gt$  for  $\bar{n}_0 = 1$  (a), 5 (b), and 10 (c)

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}(s_+ e^{-i\omega_0 t} + s_- e^{i\omega_0 t}), \\ s_2 &= \frac{1}{2i}(s_+ e^{-i\omega_0 t} - s_- e^{i\omega_0 t}). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

实际上,  $s_1$  和  $s_2$  分别对应原子偶极矩的色散部分和吸收部分<sup>[10]</sup>。

若系统存在某个状态使得:

$$\left. \begin{aligned} \langle (\Delta s_i)^2 \rangle &< \frac{1}{2} |\langle s_3 \rangle|, \\ F_i &= \langle (\Delta s_i)^2 \rangle - \frac{1}{2} |\langle s_3 \rangle| < 0 \quad (i=1 \text{ 或 } 2). \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

我们就说原子偶极矩的  $s_i$  ( $i=1$  或  $2$ ) 分量的涨落被“压缩”, 即原子呈现压缩效应。

不难证明, 对任意状态

$$\langle s_1^2 \rangle = \langle s_2^2 \rangle = \frac{1}{4}. \quad (31)$$

将(23), (24)和(31)式代入(30)式, 并利用  $s_+^\dagger = s_-$ , 便可对原子压缩效应是否存在进行分析。为方便起见, 我们取  $\phi=0$ 。这时,  $F_1 \geq 0$ , 表明原子偶极矩的色散部分没有得到压缩。但在一定的条件下,  $F_2$  可在某时间范围内小于零, 如图3所示, 这表明原子偶极矩的吸收部分得到压缩。进一步研究, 我们发现, 当  $\bar{n}_c$  较小时, (如图3a), 压缩效应的出现是没有规律的, 但当  $\bar{n}_c$  较大(如图3b, 3c)时, 压缩效应出现在原子反转的崩溃区域内, 且随着  $\bar{n}_c$  的增大, 初次压缩的时间变短<sup>[4]</sup>。

### 3. 光场的压缩效应

定义光场的两个缓变的正交的厄米算符<sup>[3]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2}(a e^{i\omega t} + a^\dagger e^{-i\omega t}), \\ a_2 &= \frac{1}{2i}(a e^{i\omega t} - a^\dagger e^{-i\omega t}), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

若存在

$$\langle (\Delta a_i)^2 \rangle < \langle (\Delta a_i)^2 \rangle_{\text{coh}} = \frac{1}{4} \quad (i=1 \text{ 或 } 2), \quad (33)$$

即

$$Q_i < 0 \quad (i=1 \text{ 或 } 2). \quad (34)$$

我们就说光场的  $a_i$  ( $i=1, 2$ ) 分量被压缩。这里

$$Q_i = \frac{\langle (\Delta a_i)^2 \rangle - \langle (\Delta a_i)^2 \rangle_{\text{coh}}}{\langle (\Delta a_i)^2 \rangle_{\text{coh}}} = 4\langle (\Delta a_i)^2 \rangle - 1. \quad (35)$$

由(25)~(27), (35)式及  $(a^\dagger)^\dagger = a$  便可以对光场压缩效应进行有效分析。图4是我们在  $\phi=0$  情况下取  $\bar{n}_c=1$  和  $10$  时,  $Q_1$  和  $Q_2$  的演化。当  $\bar{n}_c=1$  时,  $Q_1$  随时间的振荡并无规律可循。而  $\bar{n}_c=10$  时,  $Q_1$  几乎存在着与原子反转类似的崩溃和回复现象, 但  $Q_2$  此时则呈现规则的 Rabi 振荡。在这两种情况 ( $\bar{n}_c=1, 10$ ) 下, 光场的  $a_1$  分量均可呈现压缩效应, 但对  $\bar{n}_c=10$ ,  $a_2$  分量则不呈现压缩效应。在其他情况下,  $a_2$  分量有可能被压缩<sup>[3]</sup>。

### 4. 光子的聚束和反聚束效应

对单横光场, 其二阶相干度  $g^{(2)}(0)$  可表为<sup>[9]</sup>:

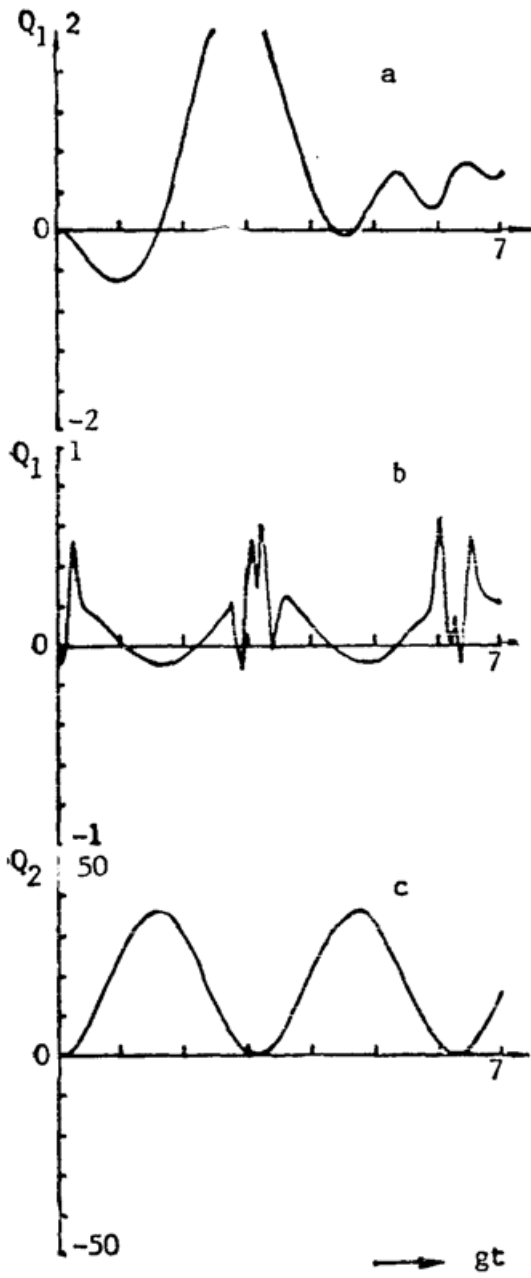


Fig. 4  $Q_1$  and  $Q_2$  vs  $gt$  for  $\bar{n}_c=1$  and 10 (b), (c).

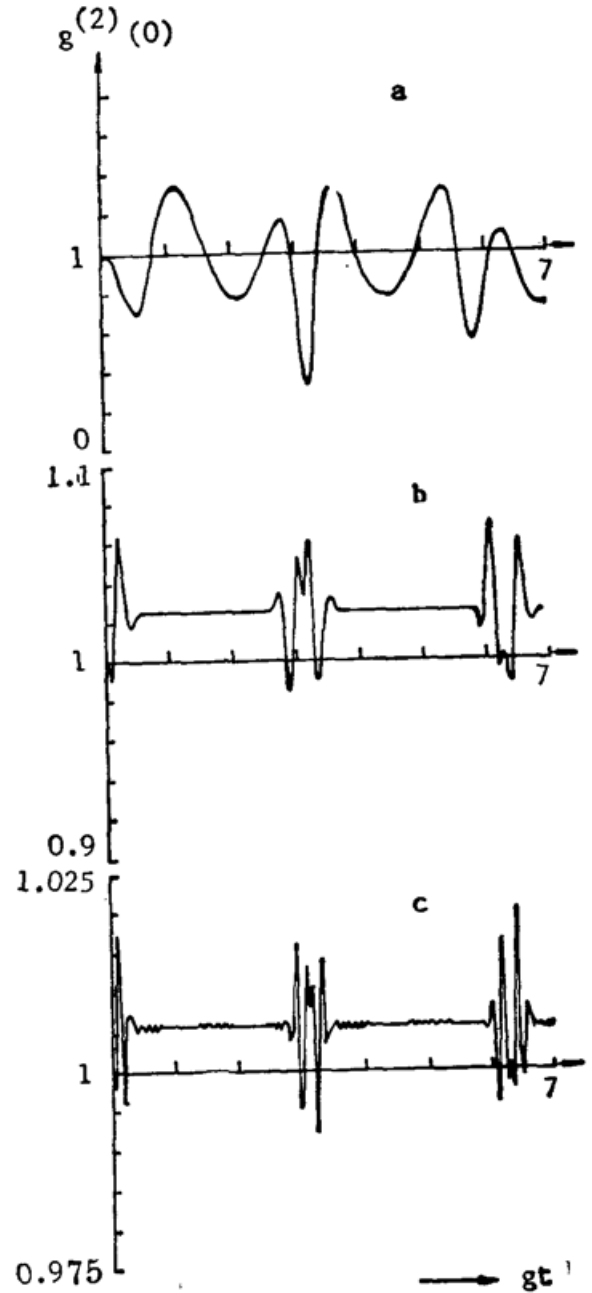


Fig. 5  $g^{(2)}(0)$  vs  $gt$  for  $\bar{n}_c=1$  (a), 10 (b) and (c).

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle a^+ a^+ a a \rangle}{\langle a^+ a \rangle^2}, \tag{36}$$

若  $g^{(2)}(0) > 1$ , 光子是聚束的, 光场呈现经典态; 若  $g^{(2)}(0) < 1$ , 光子是反聚束的, 光场呈现非经典态。

图 5 是在  $\bar{n}_c$  分别取 1, 10 和 20 情况下, 二阶相干度  $g^{(2)}(0)$  随时间的变化规律。不难发现: 当  $\bar{n}_c \gg 1$  (如图 5b, 5c) 时,  $g^{(2)}(0)$  呈现与原子反转类似的崩溃-回复效应<sup>[7]</sup>, 且光子的反聚束效应发生在崩溃区域内, 随着  $\bar{n}_c$  的增大, 光子的反聚束效应将逐步减弱。因此, 若要增强光子的反聚束效应, 则应减小初始光场的平均光子数  $\bar{n}_c$ 。

## 五、结 论

本文利用时间演化算符, 精确求解了一般多光子 J-C 模型的演化规律, 并应用到具体的双光子 J-C 模型, 详细讨论其动力学行为和量子统计特性。同样, 对其它情况, 应用我们的结果也可进行有效的研究。对此, 我们将另文报道。

### 参 考 文 献

- [1] E. T. Jaynes, F. W. Comings; *Proc. IEEE*, 1963, **51**, No. 1 (Jan), 89~109.
- [2] J. H. Eberly, N. B. Narozhny *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **44**, No. 20 (May), 1232~1235.
- [3] A. S. Shumovsky, F. L. Kien *et al.*; *Phys. Lett. (A)*, 1987, **123**, No. 6~7 (Oct), 351~354.
- [4] 周鹏, 彭金生; 《物理学报》, 1989, **38**, No. 12 (Dec), 2044~2048.
- [5] M. Hillery; *Phys. Rev. (A)*, 1987, **35**, No. 10 (May), 4186~4191.
- [6] C. T. Lee; *Opt. Commun.*, 1985, **56**, No. 2 (Nov), 136~140.
- [7] P. Alsing, M. S. Zubairy; *J. O. S. A. (B)*, 1987, **4**, No. 2 (Feb), 177~184.
- [8] G. Rempe, H. Walther *et al.*; *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**, No. 4 (Jan), 353~356.
- [9] R. Loudon; 《*The Quantum Theory of Light*》, (Clarendon Press, Oxford, 1983), 211~247.
- [10] 李孝申, 朱诗尧等; 《光学学报》, 1989, **5**, No. 5 (May), 394~395.

## Evolution of the multiphoton Jaynes-Comings model

ZHOU PENG

(Department of Physics, Hubei College of Education, Wuhan)

PENG JINSHENG

(Department of Physics, Huazhong Normal University, Wuhan)

(Received 24 October 1989; revised 16 April 1990)

### Abstract

In this paper, the general evolution laws of the multiphoton Jaynes-Comings model which is initially in an arbitray state have been investigated. The quantum statistical properties of the two-photon Jaynes-Comings model for a two-level atom interaction with a coherent light field, as example, have been discussed.

**Key words:** multiphoton Jaynes-Comings model; quantum statistical property.