

扩展光源照明的双光栅系统滤波狭缝 对成象莫尔条纹的作用与影响

鞠 莉 李文兰 钟 安
(西北工业大学 应用物理系, 西安)

提 要

本文用衍射理论定量分析了扩展光源照明的双光栅系统中滤波狭缝对成象莫尔条纹形成的影响及作用, 给出了狭缝的面内及离面位移量与条纹手移量及倾斜角间的关系。

关键词: 狭缝, 狭缝位移, 莫尔条纹移动。

一、引 言

扩展光源照明 Talbot 干涉仪时, 若加一滤波系统, 在输出面上将仍有莫尔条纹产生, 如图 1 所示。本文从衍射理论出发, 分析双光栅系统的莫尔条纹形成机理, 指出滤波狭缝的作用是对扩展光源进行了编码。对滤波狭缝存在面内及离面位移时输出面上的条纹产生平移和倾斜等现象^[1]进行了讨论, 得出了条纹的倾斜是一些莫尔条纹段迭加结果的结论, 并给出了滤波函数对条纹影响及狭缝位移与莫尔条纹移动间的定量关系。

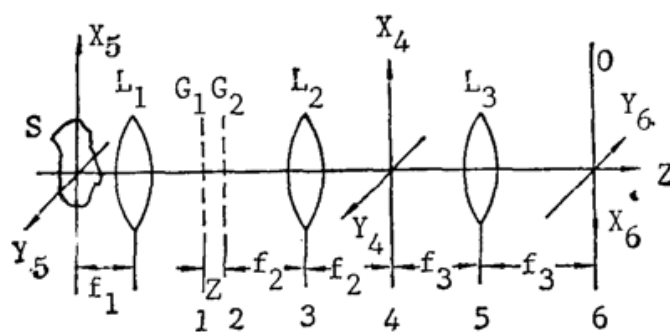


Fig. 1 Two grating system illuminated with extended light source

二、滤波狭缝的作用及面内位移的影响

当用扩展光源照明图 1 所示的系统时, 必须在 4 面上加一与 G_1 光栅栅线平行的狭缝才能在 O 面上观察到莫尔条纹^[1]。设 S 为单色扩展光源, 两光栅周期相等为 d , 两光栅栅线方向间有一夹角 θ , 且相距为一定的 Talbot 距离 z 。光栅 G_1, G_2 的透过率分别为

$$\left. \begin{aligned} g_1(x) &= \sum_n A_n \exp\left(i \frac{2\pi n x}{d}\right), \\ g_2(x) &= \sum_m A_m \exp\left[i \frac{2\pi m}{d} (x \cos \theta - y \sin \theta)\right]. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

考虑光源上任一点 (x_s, y_s) , 经透镜 L_1 后成为空间频率为 μ_x, μ_y 的平面波。此时 G_1 前的光场分布为*

$$\left. \begin{aligned} u_1^-(x_1, y_1) &= \exp[i 2\pi (\mu_x x_1 + \mu_y y_1)], \\ \mu_x &= -\frac{x_s}{\lambda f_1}, \quad \mu_y = -\frac{y_s}{\lambda f_1}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

由菲涅耳衍射公式^[2], G_2 光栅前的光场分布为**

$$\left. \begin{aligned} u_2^-(x_2, y_2) &= [u_1^-(x_1, y_1) g_1(x)] \otimes \otimes q(x_2 y_2; 1/\lambda z) \\ &= \exp[i 2\pi (\mu_x x_2 + \mu_y y_2)] g_1(x_2 - \lambda z \mu_x), \\ q(x, y; \gamma) &= \exp[i \gamma (x^2 + y^2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

G_2 后的光场分布为

$$\begin{aligned} u_2^+(x_2, y_2) &= u_2^-(x_2, y_2) g_2(x_2, y_2) \\ &= \exp[i 2\pi (\mu_x x_2 + \mu_y y_2)] \sum_m \sum_n A_m A_n \\ &\quad \exp\left\{i \frac{2\pi}{d} [n(x_2 - \lambda z \mu_x) + m(x_2 \cos \theta - y_2 \sin \theta)]\right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

4 面前的光场分布为

$$\begin{aligned} u_4^-(x_4, y_4) &= \mathcal{F}\{u_2^+(x_2, y_2)\}_{x_4/\lambda f_2, y_4/\lambda f_2} \\ &= \sum_m \sum_n \left\{ A_m A_n \exp\left(-i \frac{2\pi n \lambda z}{d} \mu_x\right) \delta\left[\frac{x_4}{\lambda f_2} - \mu_x - \frac{m+n}{d}\right] \right. \\ &\quad \left. \times \delta\left[\frac{y_4}{\lambda f_2} - \mu_y - \frac{m \sin \theta}{d}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (5)$$

若在 4 面上加的方位与 G_1 栅线平行的狭缝, 狭缝中心在 $x_4 = x_0$ 处, $S(x_4) = \delta(x_4 - x_0)$ 。则

$$u_4^+(x_4, y_4) = u_4^-(x_4, y_4) s(x_4) = u_4^-(x_0, y_0) \delta(x_4 - x_0), \quad (6)$$

此式仅在 μ_x 满足

$$\mu_x = \frac{x_0}{\lambda f_2} + \frac{m+n}{d}, \quad (m+n) = k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

时才不恒为零。经变换透镜 L_3 后(取反向标坐, 且为方便起见, 令 $f_2 = f_3 = f$)

$$u_6(x_6, y_6) = \mathcal{F}^{-1}\{u_4^+(x_4, y_4)\}_{x_6/\lambda f, y_6/\lambda f} \quad (8)$$

考虑扩展光源的总贡献, O 面光强为

$$\begin{aligned} I_6(x_6, y_6) &= \iint_{-\infty}^{\infty} |u_6(x_6, y_6)|^2 d\mu_x d\mu_y \\ &= \sum_k \left| \sum_n A_n A_{k-n} \exp\left[i \frac{2\pi n \sin \theta}{d} \left(y_6 - \frac{z x_0}{f \sin \theta}\right)\right] \right|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

可见在 O 面上出现周期结构的条纹, 条纹方程为

$$\sin \theta \cdot y_6 - \frac{z x_0}{f} = M d, \quad M = 1, 2, \dots \quad (10)$$

* 用上标 $-$, $+$ 分别表示图中某面左、右侧的光场。

** 忽略常数因子。

当 4 面上的狭缝在 x 方向移动 Δx_0 , (9) 式表明, O 面的条纹将在 y 向移动

$$\Delta y_6 = \frac{z}{f \sin \theta} \Delta x_0 \quad (11)$$

一般 θ 角很小, 在两光栅间距较大时, 狭缝在 x 方向的小位移将在 O 面由莫尔条纹在 y 向的位移“放大”显示出来。若狭缝宽度有限为 b , $S(x_4) = \text{rect}[(x-x_0)/b]$ 。经计算有

$$I_6(x_6, y_6) \propto \frac{b}{\lambda f} \left\{ \sum_n \sum_{n'} B_n B_{n'}^* \sin C \left[\frac{z b (n-n')}{d f} \right] \cdot \exp \left[\frac{i 2 \pi \sin \theta (n-n')}{d} \left(y_6 - \frac{x_0 z}{f \sin \theta} \right) \right] \right\} \quad (12)$$

(12) 式表明, 在 O 面上仍会有周期光强分布。条纹对比度与缝宽 b 有关。当

$$b = m \frac{f d}{z}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (13)$$

时, $I_6(x_6, y_6) = \text{常数}$, 对比度降为零, 条纹消失。随着缝宽的逐渐加大, O 面上的条纹将周期地出现, 对比度逐次下降, 在 $b < (fd/z)$ 时, 条纹较清晰。

三、滤波狭缝离面位移的影响

若图 1 中 4 面上的狭缝有离面位移, 狭缝就不再能视为空间滤波器了, 但 O 面上仍有条纹产生, 且条纹比狭缝在 4 面上的条纹相对转运了一个角度。这里用等效透镜的观点进行讨论。设 4 面上的狭缝离开 L_2 透镜后焦面 h 距离, 如图 2 所示, 则狭缝所处面左侧的光强分布为

$$u_4^-(x_4, y_4) = \mathcal{F} \{ u_2^+(x_2, y_2) q^*(x_2, y_2; h/\lambda f^2) \}_{x_4/\lambda f, y_4/\lambda f} \quad (14)$$

(14) 式表明, 在离透镜 L_2 后焦面 h 处的场分布相当于在 2 面上有一等效透镜 L' , 而仍在 L_2 透镜后焦面得到的场分布。离焦量 h 与等效透镜焦距 f' 间的关系为

$$f' = f^2/h. \quad (15)$$

其等效光路如图 3 所示。按等效光路考虑, 狭缝函数为 $S(x_4) = \text{rect}[(x-x_0)/b]$ 时, 有

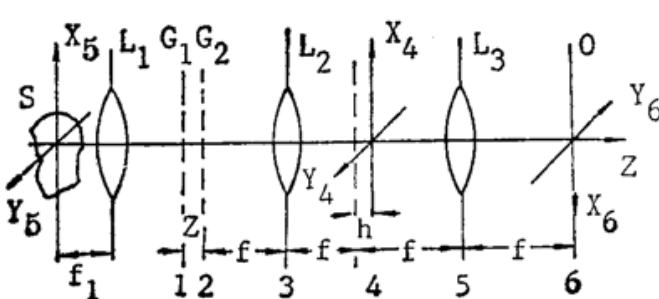


Fig. 2 The slit has a h displacement in a direction

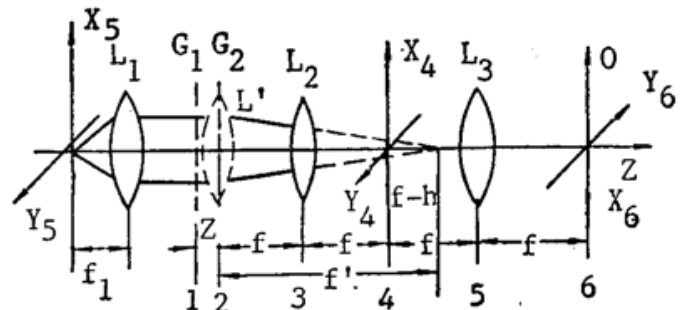


Fig. 3 Equivalant lens system

$$u_4^+(x_4, y_4) = u_1^-(x_4, y_4) S(x_4), \quad (16)$$

$$u_6(x_6, y_6) = \mathcal{F}^{-1} \{ u_4^+(x_4, y_4) \}_{x_6/\lambda f, y_6/\lambda f} = [u_2^+(x_6, y_6) q(x_6, y_6; 1/f'\lambda)] \otimes \otimes \sin C \left[\frac{b x_6}{\lambda f} \exp \left(\frac{i 2 \pi x_0 x_6}{\lambda f} \right) \delta \left(\frac{y_6}{\lambda f} \right) \right]. \quad (17)$$

(17) 式是变量可分的, 含 x 的项为

$$\begin{aligned} & \left[\sin C\left(\frac{bx_0}{\lambda f}\right) \exp\left(\frac{i2\pi x_0 x_0}{\lambda f}\right) \right] \otimes \left\{ \exp\left[-\frac{i\pi x_0^2}{\lambda f'} + i2\pi x_0\left(\mu_x + \frac{m+n}{d}\right)\right] \right\} \\ & = \exp\left[i2\pi x_0\left(\mu_x + \frac{m+n}{d}\right) - \frac{i\pi x_0^2}{\lambda f'}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \sin C\left(\frac{b\alpha}{\lambda f}\right) \right. \\ & \quad \left. \cdot \exp\left[i2\pi\left(\frac{x_0}{\lambda f} - \mu_x - \frac{m+n}{d} + \frac{x_0}{\lambda f'}\right)\alpha - \frac{i\pi\alpha^2}{\lambda f'}\right] \right\} d\alpha \end{aligned} \quad (18)$$

因为 $\sin C(b\alpha/\lambda f)$ 在 $|\alpha| > \lambda f/b$ 时值很小, (18)式的积分主要在 $|\alpha| < \lambda f/b$ 中进行。指数二次因子 $\alpha^2/\lambda f'$ 在上述区间内有 $(\alpha^2/\lambda f') < (\lambda h/b^2)$ 。若 $h < (b^2/\lambda)$, 则指数含 α^2 项因子可提出积分另外。经整理后(17)式成为

$$\begin{aligned} u_0(x_0, y_0) & = \exp[i2\pi(\mu_x x_0 + \mu_y y_0)] q^*(x_0, y_0; 1/\lambda f') \sum_m \sum_n \left\{ A_m A_n \right. \\ & \quad \left. \cdot \exp\left[\frac{i2\pi}{d}\left((m+n)x_0 - m \sin \theta y_0 - n \lambda z \mu_x\right)\right] \text{rect}\left[\frac{\lambda f}{b}\left(\frac{x_0}{\lambda f'} + \frac{x_0}{\lambda f} - \mu_x - \frac{m+n}{d}\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

光源上一点 (x_0, y_0) 在 O 面的光强分布为

$$I_0'(x_0, y_0) = |u_0(x_0, y_0)|^2. \quad (20)$$

某一级次 $(m+n) = k$ 项的贡献为

$$\begin{aligned} I_{0k}(x_0, y_0) & = \left| \sum_n A_n A_{k-n} \exp\left[\frac{i2\pi n}{d} \sin \theta \left(y_0 - \frac{\lambda z \mu_x}{\sin \theta}\right)\right] \right|^2 \\ & \quad \cdot \text{rect}\left[-\left(x_0 - \frac{x_0 f}{h} - \lambda f' \mu_x - \frac{\lambda f' k}{d}\right) / \left(\frac{bf}{h}\right)\right]. \end{aligned} \quad (21)$$

(21)式对应着 O 面上一宽度为 $\Delta x_0 = (bf/h)$ 的矩形区域。矩形出沿 y 向有周期结构。考虑 $(m+n) = k = 1, 2, \dots$ 的所有级次, 每一 k 值对应着 O 面上一中心位置不同的矩形, 其结果呈图 4 形状。

考虑光源面上所有点的贡献。若 $h \gg b$ (一般 b 宽度较小, 此关系可满足), (21)式中矩形函数可近似表示成 δ 函数。则 O 面上总光强为

$$\begin{aligned} I_0(x_0, y_0) & = \iint_{-\infty}^{\infty} |u(x_0, y_0)|^2 d\mu_x d\mu_y \\ & = \iint_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_m \sum_n A_m A_n \exp\left\{\frac{i2\pi}{d}\left[(m+n)x_0 - m \sin \theta y_0 - n \lambda z \mu_x\right]\right\} \right|^2 \delta\left(\mu_x - \frac{x_0}{\lambda f'} - \frac{x_0}{\lambda f} + \frac{m+n}{d}\right) d\mu_x d\mu_y \\ & = \sum_k \left| \sum_n A_n A_{k-n} \exp\left[\frac{i2\pi n}{d}\left(\sin \theta y_0 - \frac{z}{f'} x_0 - \frac{z}{f} x_0\right)\right] \right|^2. \end{aligned} \quad (22)$$

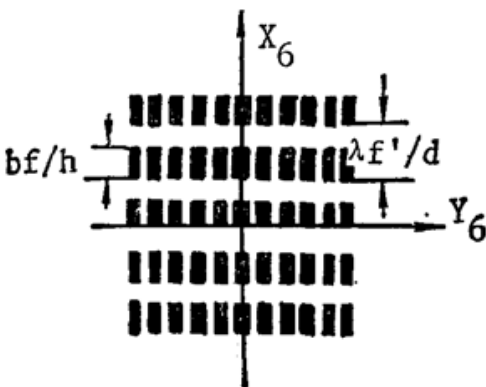


Fig. 4 Segment of Moiré fringes

(22)式表明 O 面上光强仍呈周期分布, 条纹方程为

$$\sin \theta y_0 - \frac{z x_0}{f'} - \frac{z x_0}{f} = Nd, \quad N = 1, 2, \dots \quad (23)$$

这是 O 面上一族倾斜条纹。条纹斜率为

$$\frac{dx_6}{dy_6} = \tan \alpha = \frac{zf'}{\sin \theta} = \frac{zh}{f^2 \sin \theta} \quad (24)$$

即狭缝位置离开 L_2 后焦面, O 面上条纹倾斜, 倾斜方向由狭缝是远离 L_2 透镜还是靠近 L_2 透镜决定。这个结果与刘立人^[3]用几何光学近似得到的结果一致。

若狭缝沿 z 轴移动 Δh , 条纹将倾斜一个角度为

$$\Delta \tan \alpha = \frac{z \Delta h}{f^2 \sin \theta} \quad (25)$$

四、讨 论

(1) 在图 1 的 4 面上加一狭缝, 实际上是限制了光源面上对最终条纹有贡献的区域。其作用等效于对光源进行了光栅编码。“编码光栅”周期 d_s 与栅格宽度 a 由光学系统参数确定。

$$d_s = f_1 d / z, \quad a = f_1 b / f \quad (26)$$

如果直接在光源面加光栅进行编码, 光栅常数一定, 只适用于对应的特定参数光学系统。当光学系统参数稍有变动, 则需更换编码光栅。而在 4 面上加狭缝实现的等效编码光栅的光栅常数及栅格宽度是随光学系统参数及狭缝宽度改变的, 因而有较大的灵活性。

(2) 狭缝离焦造成的最终倾斜条纹已不再是 G_1 、 G_2 光栅重迭的莫尔条纹了。斜条纹是光源上各点在 O 面形成的如图 4 形状的条纹段依次错位迭加的结果, 如图 5 所示。

若 h 不满足 $h \gg b$, (21) 式中的矩形函数不能用 δ 函数近似。但较复杂的计算可以答出(本文从略), 最终 O 面光强仍呈周期结构分布, 条纹方程式及斜率关系式不变。

图 6(a) 为激光点光源照明时, 在 O 面得到的图像, 与图 4 是一致的。图 6(b) 为扩展光

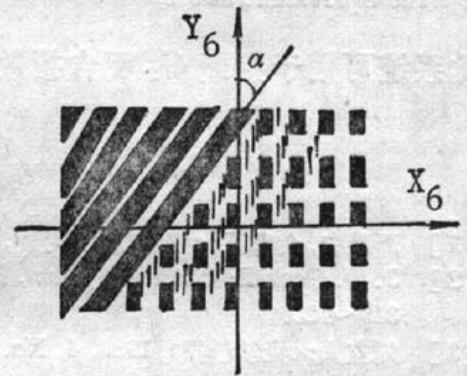
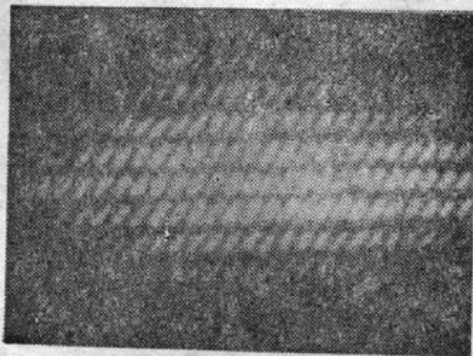
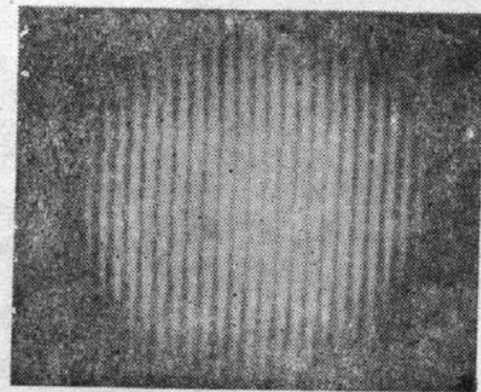


Fig. 5 Final result of the combination of segments of Moire fringes



(a)



(b)

Fig. 6 Fringes obtained on the observation plane (System in Fig. 1)

(a) When illuminated by a laser point light source;

(b) When illuminated by an extended white light

源照明同一系统在 O 面得到的图像, 结果与图 5 一致。条纹倾角与狭缝离焦量间关系与

(25) 式符合得很好。

从等效光路的观点来看, 狭缝离焦的效果与在 G_2 面加一等效透镜的效果一致。图 7(a) 为等效光路图 3 在 O 面得到的图形, 其中为作比较, 透镜 L' 仅占视场的一部分, 有透镜部分的条纹倾斜。图 7(b) 是狭缝在图 3 系统中仍有离焦量 $-h$ 时 O 面得到的图形。可以看出由等效透镜造成的条纹倾斜被狭缝离焦的“负透镜”效应补偿了。

此外, 实验结果表明, 条纹的平移量与狭缝面内位移量间的关系也符合 (11) 式。

狭缝面内位移引起条纹平移与狭缝离面位移引起条纹倾斜的效应可望在测量三维小位移中得到应用。此外, 由等效透镜的观点,

此系统可用于判断 G_2 面含指数二次位相因子的位相物体的参数。

参 考 文 献

- [1] 严瑛白, 余官正; 《仪器仪表学报》, 1982, 3, No. 2 (May), 150~158。
- [2] J. D. Gaskill; 《Linear System, Fourier Transforms and Optics》, (John Will & Sons, New York, 1978), 349~420。
- [3] 刘立人; 《光学学报》, 1984, 4, No. 6 (Jun), 522~527。

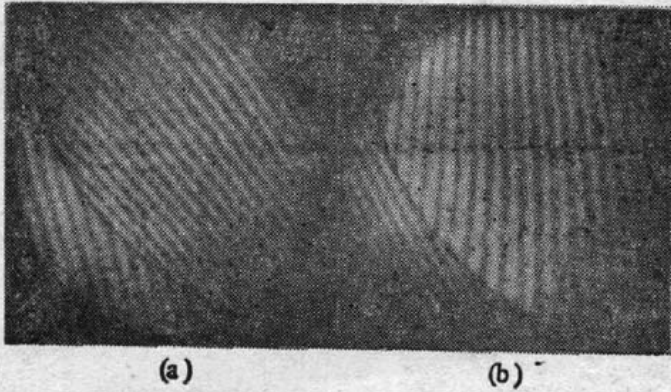


Fig. 7 Equivalent lens effect

(a) Tilting fringes obtained in equivalent lens system (Fig. 3) (for comparison, only part of the viewing field is occupied by equivalent lens L');

(b) The slit has an out of plane displacement (the tilting fringe in (a) now compensated by the equivalent effect)

The effect of slit filter on the fringes in a two gratings system illuminated by extended light source

JU LI, LI WENLANG AND ZHONG AN

(Department of Applied Physics, Northwestern Polytechnical University, Xian)

(Received 18 December 1989; revised 3 April 1990)

Abstract

In this paper the effect of the slit filter in a two grating system illuminated by extended light source on the formation of the final Moire fringes is discussed. The phenomena that the final fringes will move and tilt when the slit filter has displacements was analysed. It shows that the tilted fringes are a combination of many segments of fringes. The quantitative relations between the displacements of the slit and the movement and tilting angle of the fringes are given. All the results are tested experimentally.

Key words: slit filter; displacements of slit; movements of Moire fringes.