第10卷 第8期 光学学报 Vol. 10, No. 8
1990年8月 ACTA OPTICA SINICA August, 1990

激光束在漫射表面上散射统计模型的严格解

孙凤国 胡洪波
(国防科技大学 应用物理系，长沙)

提 要

本文对激光束在漫射表面上散射的一类统计模型给出了严格解，并与“质心近似”所得结果作了比较。
关键词：漫射表面，质心近似。

长期以来，激光在漫射表面上的散射问题就受到人们的关注，程路等同志发表的一系列文章建立了描述这一过程的统计模型[1~4]，并引入了一种“质心近似”进行求解。然而由于没有其它方法比较，“质心近似”的准确程度如何并不清楚。本文给出了这类统计模型的严格解得到的结论非常明确，便于分析。

在本文中针对文献[1]提出的无规则一维道痕的模型来说明我们的方法。漫射表面、接收平面，光束之间的几何关系，以及有关模型的详细说明请参见文献[1]，这里不再赘述。根据文献[1]的推导，接收平面上(ξ, ζ)点的光强是期望值

$$\overline{I(\xi, \zeta)}=\left[\frac{\pi\lambda}{6}(1+\cos\theta)\frac{\omega_0}{\omega_{s1}}\right]^2 E(|L|^2), \tag{1}$$

其中

$$L=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\lambda^2 n^2/\omega_{s1}^2\exp[i(\psi_n+H_n)], \tag{2}$$

$$\psi_n=2n\pi\sin\theta-\frac{n^2\pi\lambda}{R_1}, \tag{3}$$

$$H_n=\frac{2\pi}{\lambda}h_n(1+\cos\theta)\cos\gamma。 \tag{4}$$

这里ω_0、ω_{s1}、ω_{s2}、λ、θ、γ、a、b诸量的物理意义均与文献[1]中相同，h_n是漫射表面第n个台条的高度，它是满足一定统计分布的随机变量。现在问题的关键是求(1)式中的期望值，$E(|L|^2)$，为方便起见，我们先让L的求和从$-N$到N进行，最后让$N\to\infty$，

$$\begin{aligned}E(|L|^2)&=E(LL^*)\\&=E\left(\sum_{n=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N}\exp\left(-\frac{\lambda^2 n^2}{\omega_{s1}^2}\right)\exp\left(-\frac{\lambda^2 l^2}{\omega_{s1}^2}\right)\right.\\&\quad\left.\exp[i(\psi_n+H_n)-i(\psi_l+H_l)]\right)。\end{aligned} \tag{5}$$

按期望值的定义

$$E(|L|^2)=\int\cdots\int P(H_{-N}, H_{-N+1}, \cdots H_N)\sum_{n=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N}$$

收稿日期：1990年2月6日

$$\times\exp\left(-\frac{\lambda^2 n^2}{\omega_{s1}^2}\right)\exp\left(-\frac{\lambda^2 l^2}{\omega_{s1}^2}\right)\exp[i(\psi_n+H_n)-i(\psi_l+H_l)]dH_{-N}\cdots dH_N。\tag{6}$$

其中 $P(H_{-N}, H_{-N+1}\cdots H_N)$ 是 $2N+1$ 个变量 $H_{-N}\cdots H_N$ 的联合概率密度函数。在各台条高度分布统计上相互独立的情况下

$$P(H_{-N}, H_{-N+1}, \cdots H_N)=\prod_{n=-N}^{N}p(H_n)。\tag{7}$$

将(7)式代入(6)式，交换积分与求和的顺序，并考虑到

$$\int_{-H}^{H}p(H_n)dH_n=1,\tag{8}$$

得到

$$E(|L|^2)=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N}\int_{-H}^{H}\exp\left[-\frac{\lambda^2 n^2}{\omega_{s1}^2}+i(\psi_n+H_n)\right]p(H_n)dH_n$$

$$\cdot\int_{-H}^{H}\exp\left[-\frac{\lambda^2 l^2}{\omega_{s1}^2}-i(\psi_l+H_l)\right]p(H_l)dH_l。\tag{9}$$

由文献[1]可设

$$p(H_n)=\begin{cases}c\exp(-\beta|H_n|) & |H_n|<H,\\ 0 & |H_n|>H。\end{cases}\tag{10}$$

常数 c 由归一化条件决定。这样(9)式化为

$$E(|L|^2)=\sum_{n=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N}\exp\left(-\frac{\lambda^2 n^2}{\omega_{s1}}\right)\exp(i\psi_n)\exp\left(-\frac{\lambda^2 l^2}{\omega_{s1}^2}\right)\exp(-i\psi_l)$$

$$\times\int_{-H}^{H}c\exp(-\beta|H_n|)\exp(iH_n)dH\int_{-H}^{H}c\exp(-\beta|H_n|)$$

$$\times\exp(-iH_l)dH_l。\tag{11}$$

显然(11)式中的积分完成后与 n 或 l 无关，记

$$S(H)=\int_{-H}^{H}c\exp(-\beta|H_n|)\exp(iH_n)dH_n,\tag{12}$$

$$J=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp(-\lambda^2 n^2/\omega_{s1}^2)\exp(i\psi_n),\tag{13}$$

(11)式即可写成

$$E(|L|^2)=|S(H)|^2|J|^2。\tag{14}$$

理想平面反射时接收面上 $(\xi, 0)$ 点光强应为[1]

$$I_0(\xi, 0)=\left(\frac{\omega_0}{\omega_{s2}}\right)^2\exp(-2\xi^2/\omega_{s2}^2)。\tag{15}$$

而按这里 $H=0$ 情况

$$I_0(\xi, 0)=\left[\frac{\pi\lambda}{b}(1+\cos\theta)\frac{\omega_0}{\omega_{s1}}\right]^2|J|^2。\tag{16}$$

比较(15)和(16)式，最后

$$\overline{I(\xi, 0)}=\left(\frac{\omega_0}{\omega_{s2}}\right)^2|S|^2\exp(-2\xi^2/\omega_{s2}^2)。\tag{17}$$

从(12)式可将 S 解析积分出来，代入到(17)式中得

$$\overline{I(\xi, 0)}=\left(\frac{\omega_0}{\omega_{s2}}\right)^2\left[\frac{(\sin H-\beta\cos H)\exp(-\beta H)+\beta}{\frac{1}{\beta}(1-\exp(-\beta H))(1+\beta^2)}\right]^2\exp(-2\xi^2/\omega_{s2}^2)。\tag{18}$$

和文献[1]"质心近似"得到的结果比较发现，有趣的是文献[1]中(33)式第一项恰好给出了这里的严格解结果，而第二项的出现完全是由于"质心近似"造成的，它一般很小，也说明"质心近似"是一好的近似，但是和严格解比较它反而更复杂。我们的方法还可用于二维起伏模型[2]这里不再重复讨论。

参考文献

[1] 程路;《物理学报》,1978, **27**, No. 6 (Nov), 651～663。
[2] 程路;《物理学报》,1979, **28**, No. 4 (Jul), 470～481。
[3] 程路,张炳泉;《物理学报》,1980, **29**, No. 12 (Dec), 1570～1580。
[4] 程路;《物理学报》,1988, **37**, No. 3 (Mar), 460～462。

Exact solution of a statistical model for laser beam scattering from random diffusing surface

SUN FENGGUO AND HU HONGBO
(*Applied Physics Department, National University of Defence Technology, Changsha*)

(Received 6 February 1990)

Abstract

Exact solution of a statistical model for laser beam scattering from diffusing surface has been obtained, the comparison with the approximation of center of gravity has been made.

Key words: diffusing surface; approximation of center of gravity.