第10卷 第6期
1990年6月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 10, No. 6
June, 1990

干涉图数据处理中的几个合理性判据

姚 永 龙
(清华大学 精密仪器系,北京)

曹 根 瑞
(北京理工大学 光学工程系)

提 要

在干涉图数据处理中,构成波差多项式的基底函数的性质,正则方程的求解方法,抽样点的分布与数量等对确定波差函数的解都有影响;同时在数值化的过程中,不可避免地要引入测量误差,它对波差函数的解也有较大的影响。本文利用数理统计分析的方法对上述问题产生的误差进行精确的定量分析,并给出了各自模拟计算的结果及判断波差多项式的基底函数与项数的选择、抽样点的分布与数量、拟合结果等是否合理的定量判据。

关键词:干涉术;波象差;数据处理。

假设确定了干涉图上 N 个抽样点 (X_i, Y_i) 之间的相对波差值 $W(X_i, Y_i)$, $i=1, 2, \cdots, N$。欲用一个完备基底函数系的前 M 项的线性组合来表示这个波面的波差函数,则在一般最小二乘意义下有:

$$\sum_{i=1}^{N}\Big[(W(X_i, Y_i)-\sum_{j=1}^{N}D_jZ_j(X_i, Y_i)\Big]^2=\sum_{i=1}^{N}F_i^2=\mathrm{Min}。\tag{1}$$

上式中 D_j 是待定的波差多项式的常系数,Z_j 是基底函数的表达式,F_i 是抽样点上的拟合误差。若用矢量表示上式有:

$$|W-Z|^2=\Big|W-\sum_{j=1}^{M}D_jZ_j\Big|^2=|F|^2=\mathrm{Min}。\tag{2}$$

其中

$$W=\{W(X_1, Y_1)\bar{e}_1+W(X_2, Y_2)\bar{e}_2+\cdots+W(X_N, Y_N)\bar{e}_N\}/N^{1/2},$$

$$Z_j=\{Z_j(X_1, Y_1)\bar{e}_1+Z_j(X_2, Y_2)\bar{e}_2+\cdots+Z_j(X_N, Y_N)\bar{e}_N\}/N^{1/2},$$

$$Z=D_1Z_1+D_2Z_2+\cdots+D_MZ_M=\sum_{j=1}^{M}D_jZ_j,\ F=(F_1\bar{e}_1+F_2\bar{e}_2+\cdots+F_N\bar{e}_N)。$$

若令:

$$D=(D_1, D_2, \cdots, D_M)',\ B=(W\cdot Z_1, W\cdot Z_2, \cdots W\cdot Z_M)',$$

$$A=\begin{bmatrix} Z_1\cdot Z_1 & Z_1\cdot Z_2 & \cdots & Z_1\cdot Z_M \\ Z_2\cdot Z_1 & Z_2\cdot Z_2 & \cdots & Z_2\cdot Z_M \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Z_M\cdot Z_1 & Z_M\cdot Z_2 & \cdots & Z_M\cdot Z_M \end{bmatrix}。$$

则满足(1)与(2)式的解是:

$$AD=B\quad 或\quad D=A^{-1}B。\tag{3}$$

如果确定了基底函数的形式,又确定了各抽样点上的相对波差值,就可根据(3)式求解

收稿日期:1989年10月24日;收到修改稿日期:1990年3月8日

波差多项式的待定常系数 D，这是目前干涉图二维数据处理的常用方法。但从(3)式可以看出：波差多项式的解 D 值，将随基底函数的选择、拟合项的多少、抽样点的分布与数量的不同而有差异(它与 A 和 B 有关)。下面我们应用数理统计分析的方法分别给出其定量的合理性判据。

一、选择基底函数系的判据

一般来说，当被拟合的波面较光滑连续又可忽略测量误差与计算中的舍入误差时，则不论用何种基底函数系都能获得较精确的一致拟合精度。但当存在测量误差与计算中的舍入误差时(这在数值化的过程中是难免的)，方程(3)解的不稳定性将随基底函数系的不同而不同，最后的波面拟合精度亦会有所不同[2]。

设：

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/4\\ 1/3 & 1/4 & 1/5\end{bmatrix},\quad B_1=\begin{bmatrix}11/6\\ 13/12\\ 47/60\end{bmatrix};$$

$$A_2=\begin{bmatrix}2/3 & -2/3 & -1/3\\ 2/3 & 1/3 & 2/3\\ 1/3 & 2/3 & -2/3\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}-1/3\\ 5/3\\ 1/3\end{bmatrix}。$$

则 $A_1D_1=B_1$ 与 $A_2D_2=B_2$ 的精确解是：$D_1=(1,\ 1,\ 1)'$，$D_2=(1,\ 1,\ 1)'$。

若对上述方程中 B 的元素取三位有效数字(这相当于在测量干涉图的相对波差值时，有测量误差)得到：$B_{11}=(1.83,\ 1.08,\ 0.783)'$，$B_{22}=(-0.333,\ 1.67,\ 0.333)'$。则当 $A_1D_{11}=B_{11}$ 与 $A_2D_{22}=B_{22}$ 时，其精确到四位有效数字的解是：$D_{11}=(1.080,\ 0.5400,\ 1.440)'$，$D_{22}=(1.002,\ 1.001,\ 1.002)'$。

从上面的例子可以看出：虽然在这两个方程中，矩阵 B 的系数扰动都没超过 3‰，但解的变化在例 1 中已达 50%，在例 2 中仅达 2‰。这说明：由不同系数矩阵 A 构成的正则方程组，其舍入误差(亦可看作测量误差)对解向量的影响是很不相同的，有时这种影响是难以接受的。我们总是希望测量时的舍入误差对解的影响尽可能小，那么具有何种性质的系数矩阵 A 能做到这一点呢？也就是说应对构成系数矩 A 的波差多项式的基底函数提出些什么要求呢？这就是下面我们要讨论的问题。

当测量干涉图上各抽样点之间的相对波差值时，由于测量精度所限，在数值化的过程中不可避免地要引入测量误差，这相当于在方程(3)的 B 中引入了一个微扰项 ΔB，ΔB 的存在将使解向量 D 也附加一个增量 ΔD。因此存在测量误差时，(3)式相应地写成：

$$A(D+\Delta D)=B+\Delta B。\tag{4}$$

$\because\ \ AD=B\ \ \therefore\ \ \Delta D=A^{-1}\Delta B$。两边取模有：$\|\Delta D\|=\|A^{-1}\Delta B\|\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|\Delta B\|$。又从(3)式得：$\|B\|\leqslant\|A\|\cdot\|D\|$，

$$\therefore\quad \frac{\|\Delta D\|}{\|D\|}\leqslant\|A^{-1}\|\cdot\|A\|\cdot\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}=K(A)\cdot\frac{\|\Delta B\|}{\|B\|}。\tag{5}$$

如果计算矩阵 A 时也存在舍入误差 ΔA，则令 $e=\|\Delta A\|/\|A\|$，且当：$e\cdot K(A)<1$ 时，(5)

式可写成:

$$\frac{\|\Delta D\|}{\|D\|} \leqslant \frac{K(A)\cdot(e+\|\Delta B\|/\|B\|)}{(1-e\cdot K(A))}。 \tag{6}$$

上述不等式中的 $K(A)=\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$ 是非奇异矩阵 A 在 $\|\cdot\|_p$ 模数意义下的条件数，它是当(3)式中的系数矩阵 A 与右端向量 B 有扰动时，表示方程组的灵敏程度的一种量度[1]。

从上述不等式可以看出：由系数矩阵 A 与向量 B 的扰动产生解的相对误差界的大小均与系数矩阵 A 的条件数 $K(A)$ 成正比，$K(A)$ 的值越大，扰动在解中的影响也越大。(例 1 中的 $K(A)=748$，例 2 中的 $K(A)=1$，例 1 中的 A 是有名的 Hil-bert 病态矩阵，例 2 中的 A 是正交矩阵)。因此有测量误差时，应计算系数矩阵 A 的条件数，根据其大小来判断计算结果是否合理。若发现 $K(A)$ 值太大($>10^3\sim10^5$)时，应重新选择波差多项式的基底函数、项数或改变抽样点的分布与数量。

二、确定抽样点的分布与数量的判据

理论与实践证明：用波差多项式拟合被测波面时，抽样点的分布与数量对计算结果都有一定的影响。抽样点太少拟合精度不够，抽样点太多又增加许多不必要的工作量，特别是存在测量误差时它可能增加系数矩阵的相关性，反而降低拟合精度，同时抽样点在不同区域上的疏密反映了在该区域上获得信息量的多少(抽样点的不均匀分布相当于对不同区域内的信息量进行了加权处理)，一般抽样点密集区域的拟合精度较疏散区域的拟合精度要高。因此对抽样点的数量与分布的合理性应有一个合理的定量判据。

假设在一个连续的被测波面上得到了 N 个抽样点上相对最佳参考波面的相对波差值 $W_o(X_i, Y_i)$，则这 N 个离散抽样点上的波差均方根值 RMS 为:

$$RMS=\left[\sum_{i=1}^{N} W_o(X_i, Y_i)^2/N\right]^{1/2}。 \tag{7}$$

同时假设用这 N 个抽样点上相对最佳参考波面的波差值拟合得到了解析的与连续的 M 项波差多项式，即：$W(X, Y)=\sum_{j=1}^{N} D_j Z_j$。则该连续波面的波面均方根偏差 RMS' 为:

$$RMS'=\left[\iint W^2 r\,dr d\theta\Big/\iint r\,dr\,d\theta\right]^{1/2}=\left[\iint W^2 r\,dr\,d\theta/\pi\right]^{1/2}=\left[\sum_{j=1}^{M} D_j^2\right]^{1/2}。$$

上式中的最后一个等式假设了该波差多项式在该波面的连续区域内是两两相互正交的(例 Zernike 多项式)，有关在离散数据点上构成两两正交的波差多项式的方法请参看文献[5]。

若设：$P=RMS/RMS'$，则当 $P=1$ 时表明：用这些离散抽样点上的波差值代替该点附近微小面元上的波差平均值有最佳的平均精度，此时离散抽样点上的波差值的集合从整体上最准确地反映了被测波面的全貌。事实上，由于拟合的光滑作用和波差多项式的截留误差(它截止了波差分布的高频成分)，P 不可能等于 1。根据对多个实际物镜结构参数的计算结果表明：当 P 在 1 ± 0.03 范围内时，由波差函数计算的 MTE 的差值不超过 5‰。因此我们规定 $0.97<P<1.03$ 为数据拟合时抽样点是否合理的判据。若 P 超出这个范围则需适当增减抽样点数重新构造波差函数。抽样点的分布与数量对波差函数解的影响与 P 值见表 1。

Table 1 The examples of how the number of sample points & their distribution influence the solution of wave aberration functions

	12 * 12	20 * 20	30 * 30	40 * 40	random distribution
number of sample points	112	316	716	1246	196
W_{max}	0.054	0.057	0.058	0.057	0.055
W_{min}	-0.103	-0.115	-0.0119	-0.118	-0.131
R M S	0.02383	0.02546	0.02590	0.02561	0.02456
R M S'	0.02553	0.02542	0.03052	0.01870	0.02663
P	0.93328	1.00168	0.84865	1.36967	0.92229
K(A)	135.126	33.934	8.0×10^{6}	2.0×10^{5}	4.0×10^{5}
position of image	30.7079	30.7077	30.7077	30.7077	30.7081

从表 1 可以看出：对该波面来说，抽样点按 20*20 的网格分布时，系数矩阵的条件数最小，拟合波面的均方变形量与抽样点上的波差均方值吻合最佳。

对抽样点的分布来说，一般要求它在整个被测区域上较均匀分布，但对波面起伏程度在不同区域上变化较大时，我们应在抽样点较均匀分布的前题下，对波面变化较快的区域适当增加抽样点数，反之适当减少抽样点数。抽样点的分布是否合理同样可根据 P 值的大小来判断。

三、拟合项数的选择与拟合精度是否合理的判据

任何一个连续光滑的被测波面都可用一个完备的基底函数系的线性组合来精确表示为：$W=\sum\limits_{j=1}^{M}D_jZ_j+\sum\limits_{j=M+1}^{\infty}D_jZ_j$。

从理论上说只要增加多项式的项数，就可得到任意要求的拟合精度。但由于存在测量误差，盲目地增加多项式的项数来提高拟合精度是毫无意义的。那么究竟选用多少项波差多项式来拟合是合理的，测量误差对拟合精度有什么影响？下面我们用数理统计分析方法给出其合理性的定量判据。

假设在连续的被测波面上抽样 N 个波差值 $W_c(X_i, Y_i)$ 时，存在 N 个测量误差 $E(X_i, Y_i)$，定义测量误差矢量 E 为：

$$E=[E(X_1, Y_1)e_1+E(X_2, Y_2)e_2+\cdots+E(X_N, Y_N)e_N]/N^{1/2}.$$

则矢量 E 的模即测量误差的均方根偏差为：

$$|E|=(E\cdot E)^{1/2}=\left[\sum_{j=1}^{N}E(X_i, Y_i)^2/N\right]^{1/2}。$$

那么多次测量的测量误差的数学期望值是：

$$\langle|E|^2\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{N}E(X_i, Y_i)^2/N\right\rangle,$$

因为测量误差是不相关的，所以：

$$\langle|E|^2\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{N}E(X_i,Y_i)^2\right\rangle\Big/N。$$

测量误差是随机的，所以：$\langle E_i(X_i,Y_i)^2\rangle=Q_E^2$, $i=1, 2, \cdots, N$。

上式中的 Q_E^2 是测量误差的均方偏差，它可根据测量条件事先确定。因此：$\langle|E|^2\rangle=Q_E^2$。也就是说多次测量的测量误差的均方偏差的数学期望就是测量误差本身的均方偏差值。

我们知道：在拟合波差多项式的过程中，由于拟合的光滑作用与对高频成分的截止作用，测量误差中的一部分要作为拟合误差去掉，剩余的部分才对波差函数的解产生影响。

在 N-M 维的数据与多项式构成的合成矢量空间，测量误差 E 可分解成平行于多项式子空间 S_Z 的矢量 E_Z 与垂直于 E_Z 的矢量 E_0，即：$E=E_Z+E_0$, $(E_Z\cdot E_0=0)$，其中 E_Z 数学期望是：$\langle|E_Z|^2\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{M}a_j^2/N\right\rangle$。上式中的 a_j 是测量误差在多项式空间的投影，因为正交性有：$\langle|E_Z|^2\rangle=\sum_{i=1}^{M}\langle a_j^2\rangle/N$。同时又因其对称性有：$\langle a_j^2\rangle=Q_E^2$。所以 E_Z 的均方偏差的数学期望 Q_Z 是：$Q_Z^2=\langle|E_Z|^2\rangle=MQ_E^2/N$。

又：$\langle|E|^2\rangle=\langle|E_Z+E_0|^2\rangle=\langle|E_Z|^2\rangle+\langle|E_0|^2\rangle$，所以$E_0$ 的均方偏差的数学期望 Q_0 是：

$$Q_0^2=\langle|E_0|^2\rangle=\langle|E|^2\rangle-\langle|E_Z|^2\rangle=Q_E^2(N-M)/N。$$

另E在波差多项式矢量 j 分量上投影 E_j 的均方偏差的数学期望 Q_j 是：$Q_j^2=\langle|E_j|^2\rangle=Q_E^2/N$。

因 E_0 要作为拟合误差去掉，若设拟合误差的均方根偏差为 Rf，则可根据下式来判断拟合精度是否合理：$Rf<\sqrt{1-M/N}\cdot Q_E$，须减少拟合项；$Rf\approx\sqrt{1-M/N}\cdot Q_E$，拟合适当；$Rf>\sqrt{1-M/N}\cdot Q_E$，须增加拟合项。

同时在正交的多项式子空间 S_Z 中，波差多项式矢量在 j 分量上的投影 W_j 满足下式：$W_j=Q_j|Z_j|<0.1Q_j$。

即波差多项式矢量对 j 分量贡献远小于测量误差在其上的投影，则认为该分量参与波差多项式的拟合是没有意义的，可以从拟合中除掉。这样在不增加波差多项式的总项数的情况下可选择更有效的项参与函数拟合，从而增加拟合精度。

以电影摄影镜头在 $D:f=1:2$, $\omega=0$，抽样点按 20*20 的网格分布(316 个点)，拟合波差多项式的项数选 45 项为例，在有、无测量误差的情况下按上述优选原则计算的自准波前

Table 2　The influence of measurement error on thefitted wave aberration functions

	nuber of sample points	gaussian distribution	even distribution
Q_E		0.05	0.05774
RMS	0.05093	0.07613	0.07471
RMS'	0.05084	0.05932	0.05304
R f	$<10^{-6}$	0.04810	0.05270
Q_Z		0.01887	0.02179
Q 0		0.04630	0.05374
P	1.00168	0.96527	0.99774
M		0.4%	0.3%

干涉图结果见表 2(注: 存在测量误差时有 $P=(RMS-Q_z)/RMS'$, ΔM 为上述三个波面计算 MTE 的结果(在频率为 50 L/mm 时 MTE 为峰值的一半所对应的象面)的最大差异)。

从以上的分析与计算实例可以看出: 虽然被引入的测量误差的均方差值接近或超过被测波面本身的均方差值, 但只要拟合得当, 就会由于被测波面的波差分布中的高频成分不大, 而由测量误差所引入的波差分布主要是高频成分; 拟合时, 由于函数拟合的光滑作用及截留误差(它截止波差分布中的高频成分)的存在, 最后使由存在测量误差的和不存在测量误差的波差值计算得到的波差函数的差异很小。

结论: 本文应用数理统计分析的方法, 给出了干涉图数据处理中的一系列的合理性定量判据。它对于提高波差函数的拟合精度、增加测量结果的可比性有良好的推动作用。

参 考 文 献

[1] G. W. 菲利普斯;《数值分析理论及其应用》, (机械工业出版社, 北京, 1980), 232, 245。

[2] Ruixiang Liu and K. G. Birch; «Image Assessment Infrared and Visible», (*ed. by* T. L. Williams, Oxford, England, Dec. 12~14, 1983), 86~94.

[3] Ker-Li Shu, Robert E. Parks, and R. Shannon; *JOSA*, 1981, **71**, No. 12 (Dec), 1587.

[4] Ker-Li Shu; "Analysis of Alignment and Surface Figure Error in Optical System", (Ph. D. Dissertation, University of Arizona, Tucson, 1982), 4~46.

[5] 姚永龙; "干涉图的二次数据处理", ('86 光测年会论文集, 南京, 1986), 35。

On criteria of rationality in interferogram data processing

YAO YONGLONG

(*Department of Precision Instruments, Tsinghua University, Beijing*)

CAO GENRUI

(*Department of Optical Engineering, Beijing Institute of Technology*)

(Received 24 October 1989; revised 8 March 1990)

Abstract

In an interferogram data processing, the characters of base function forming wave aberration polinomials, the solving process of canonical equation, the number of sample points and their distribution all have their influence on the solution of wave aberration functions, as well as the digitization error introduced inevitably into the measurement of interferograms. These errors are quantitatively analysed based on statistics and represented in the way of computer simulation. Meanwhile, the quantitative criteria about the selecting base function and number of terms of polinomials, the number of sample points and their destribution, and the rationality of fit results, are prosented.

Key words: interferometry; wave aberrations; data processing.