

非均匀反射全息图的理论分析*

刘大禾 何兴道** 唐伟国
(北京师范大学 物理系)

提 要

本文对非均匀反射全息图进行了理论分析。在考虑记录介质吸收的情况下,通过适当的变换,将耦合波理论中由两个线性微分方程构成的微分方程组——耦合波方程,化为一个变系数非线性微分方程——黎卡提方程。并对方程的性质进行了分析。通过数值解,发现了一些新的很有意义的现象。

关键词: 反射全息图; 耦合波方程; 记录介质。

一、引 言

均匀反射全息图作为体积全息图的一种,其主要性质已由耦合波理论^[1]给出了解释,但耦合波理论的结果与实验有矛盾^[2]。为此,作者曾对耦合波理论作了适当的补充^[3,7],使之在衍射效率方面得到了与实验相符合的理论结果。但在其他方面,如带宽,次峰现象等,理论与实验仍有很大差距。

实际制作的全息图,由于各种因素的影响,一般都是非均匀全息图。Kubota 等人曾对振幅型透射体全息进行研究^[4]。作者对反射全息图进行了深入的分析。由于耦合波理论仅在理想的特殊条件下给出了解。而在通常条件下,描述反射全息图的耦合波方程既无解析解^[5],又不能用计算机进行数值解^[6]。为了更好地分析反射全息图的性质,本文把原来由两个线性微分方程构成的方程组——耦合波方程变换成一个变系数非线性微分方程——黎卡提(Riccati)方程,并进行了数值解,结果发现了一些新的现象。

二、理 论 分 析

本文讨论的是非均匀、有电介损耗的位相型反射全息光栅。目前广泛使用的以重铬酸盐明胶制作的全息图,就是由很多这类光栅构成的。为简单起见,本文只讨论条纹非倾斜的情况。

记录时的几何关系如图1所示。设记录时物光与参考光的复振幅分别为

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= A_0 \exp(-\alpha_0 z/2) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \\ E_2 &= A_0 \exp[-(\alpha_0/2)(T_0 - z)] \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 α_0 为制作全息时记录介质的光强吸收系数, T_0 为记录介质的厚度, \mathbf{k} 为入射波矢量的

收稿日期: 1989年10月13日; 收到修改稿日期: 1989年11月28日

* 国家自然科学基金资助的项目。

** 现在南昌航空学院工作。

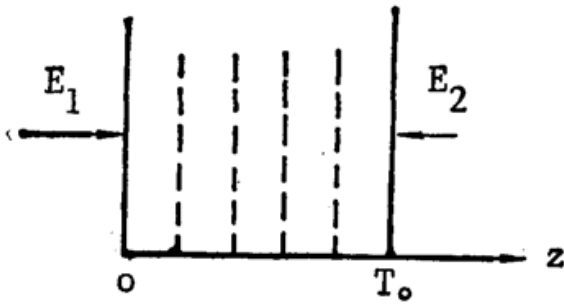


Fig. 1 The geometry of construction

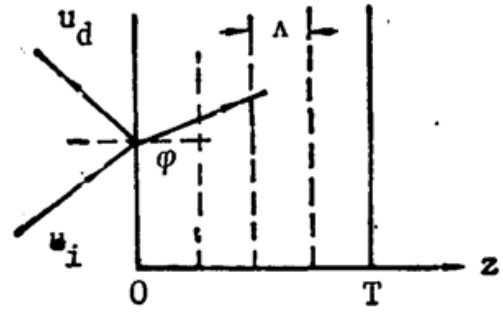


Fig. 2 The geometry of reconstruction

模。则记录介质中的光强分布为

$$I(z) = 2A_0^2 \exp[-\alpha_p T_0/2] \cosh\{\alpha_p[(T_0/2) - z]\} + 2A_0^2 \exp(-\alpha_p T_0/2) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}), \quad (2)$$

在曝光后的处理过程中,介质的折射率发生变化。考虑到折射率的变化与光强成正比的情况,则处理后介质中折射率的变化为

$$\left. \begin{aligned} \Delta n(z) &= \Delta n' + \Delta n'' \cos(\mathbf{K}_F \cdot \mathbf{r}), \\ \Delta n' &= C_f \exp(-\alpha_p T/2) \cosh\{\alpha_p[(T/2) - z]\}, \\ \Delta n'' &= C_s \exp(-\alpha_p T/2), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

式中 C_f 、 C_s 为常数,其值与全息图的制作过程及介质的调制传递函数有关。 T 为处理后全息图介质的厚度。 \mathbf{K}_F 为处理后的光栅矢量。介质在处理后要发生膨胀(对重铬酸盐明胶介质而言),膨胀因子为 M_s ,则 $T = M_s T_0$ 。设此膨胀为均匀膨胀,若记录过程中的光栅常数为 Λ_0 ,处理后的光栅常数为 Λ ,则有 $\Lambda = M_s \Lambda_0$,那么处理前后介质中的光栅矢量 \mathbf{K} 和 \mathbf{K}_F 的关系为 $\mathbf{K}_F = \mathbf{K}/M_s$ 。这样,全息图介质内的总折射率为

$$n = n_0 + \Delta n' + \Delta n'' \cos(\mathbf{K}_F \cdot \mathbf{r}). \quad (4)$$

再现全息图时的几何关系如图 2 所示。设入射波为 u_i ,衍射波为 u_d

$$u_i = R(z) \exp(-i\rho \cdot \mathbf{r}), \quad u_d = S(z) \exp(-i\sigma \cdot \mathbf{r}), \quad (5)$$

式中 ρ 、 σ 分别为入射波和衍射波的波矢量。在求解波动方程的过程中,采用 Kogelnik 的假定,入射波和衍射波满足布喇格条件,以及入射波的振动面与入射面垂直^[1]。利用 $\mathbf{s} = n^2$ 关系,将(4)式代入,考虑到在通常情况下 $\Delta n' \ll n_0$, $\Delta n'' \ll n_0$,忽略高次项,可得到

$$s = n_0^2 + 2n_0 \Delta n' + 2n_0 \Delta n'' \cos(\mathbf{K}_F \cdot \mathbf{r}), \quad (6)$$

利用(6)式,作类似于 Kogelnik 的推导^[1],得到耦合波方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dR(z)}{dz} + \frac{\alpha_0 + iF(z)}{\cos \psi} R(z) &= -i \frac{K}{\cos \psi} S(z), \\ \frac{dS(z)}{dz} - \frac{\alpha_0 + i[I + F(z)]}{\cos \psi} S(z) &= i \frac{K}{\cos \psi} R(z), \\ \alpha_0 &= \frac{\omega \mu_0 \sigma_0}{2\beta}, \quad \beta = \frac{2\pi n_0}{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

方程的边界条件为

$$R(0) = 1, \quad S(T) = 0. \quad (8)$$

方程(7)中 α_0 为全息图介质的平均吸收系数, λ 为入射波长, μ_0 、 σ_0 为介质的磁化率和电导率

$$\kappa = \frac{\pi \Delta n''}{\lambda} = \frac{\pi C_x}{\lambda} \exp\left(-\frac{\alpha_g}{2} T\right), \quad (9)$$

式中 κ 为入射波与衍射波之间的耦合系数分别为

$$F(z) = \frac{2\pi \Delta n'}{\lambda} = \frac{2\pi C_f}{\lambda} \exp\left(-\frac{\alpha_g}{2} T\right) \cosh\left[\alpha_g \left(\frac{T}{2} - z\right)\right], \quad (10)$$

$$\Gamma = K_F \cos \psi - \frac{K_F^2}{4\pi n_0} \lambda_0. \quad (11)$$

将(11)式作泰勒展开,并取一级近似,有^[1]

$$\Gamma = -\delta\psi \sin \psi_0 - \delta\lambda \frac{K_F}{4\pi n_0}, \quad (12)$$

式中 ψ_0 为布喇格角。把方程(7)与原来 Kogelnik 得到的耦合波方程进行比较,可以发现两者有明显的不同。原来的耦合波方程是一个线性常系数微分方程组。对于反射全息图,在不计任何吸收的情况下,经过复杂的计算, Kogelnik 得到了方程的解析解,进而求出了反射全息光栅的峰值衍效率^[1]

$$\eta = \text{th}^2\left(\frac{\pi n_1 T}{\lambda \cos \psi}\right), \quad (13)$$

式中 n_1 的介质中折射率的调制度。

而在考虑了记录介质的吸收的影响后,得到的耦合波方程(7)成为变系数的微分方程组,此方程无法得到解析解。同时,由边界条件(8)式看出,这个边界条件与一般方程是不同的,它是在不同位置处的条件。Kubota^[6]曾断言,描述反射全息图的耦合波方程也无法用计算机进行数值解^[6]。

为了得到方程(7)的解,我们作了如下考虑:解方程的主要目的是求出衍射效率,并可由此确定带宽。衍射效率的定义为衍射光强与入射光强之比,为此,令

$$D = \frac{S(z)}{R(z)}, \quad (14)$$

则衍射效率为

$$\eta = D^2 = [S^2(z)/R^2(z)]. \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} D'(z) &= \frac{S'}{R} - \frac{SR'}{R^2}, \\ \frac{dD(z)}{dz} &= \frac{1}{R} \frac{dS}{dz} - \frac{S}{R^2} \frac{dR}{dz}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将方程(7)中的二分式代入上式,可得到

$$\frac{dD(z)}{dz} = i \left[\frac{\Gamma + 2F(z)}{\cos \psi} \right] D(z) + \frac{2\alpha_0}{\cos \psi} D(z) + i \frac{\kappa}{\cos \psi} [1 + D^2(z)], \quad (17)$$

此方程的边界条件为

$$D(T) = 0, \quad (18)$$

这样,就将原来边界条件化为在同一点的边界条件。为计算方便,作变量替换 $y = z/T$, 并令

$$\xi = \frac{\Gamma T}{2 \cos \psi}, \quad \nu = \frac{\kappa T}{\cos \psi}, \quad B_0 = \frac{\alpha_0 T}{\cos \psi}. \quad (19)$$

那么方程(17)化为

$$\frac{dD(y)}{dy} = i \left[2\xi + \frac{2F(y)T}{\cos\psi} \right] D(y) + 2B_0 D(y) + i\nu [1 + D^2(y)]. \quad (20)$$

相应的边界条件为

$$D(1) = 0. \quad (21)$$

方程(20)或(17)称为黎卡提方程。这是一个复数的非线性微分方程。设

$$D(y) = D_1(y) + iD_2(y), \quad (22)$$

式中 $D_1(y)$ 和 $D_2(y)$ 分别代表 $D(y)$ 的实部和虚部。则方程(20)可化为两个实函数的非线性微分方程组

$$\left. \begin{aligned} \frac{dD_1(y)}{dy} &= - \left[2\xi + \frac{2F(y)T}{\cos\psi} \right] D_2(y) + 2B_0 D_1(y) - 2\nu D_1(y) D_2(y), \\ \frac{dD_2(y)}{dy} &= \left[2\xi + \frac{2F(y)T}{\cos\psi} \right] D_1(y) + 2B_0 D_2(y) + \nu [1 + D_1^2(y) + D_2^2(y)], \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

其边界条件为

$$D_1(1) = D_2(1) = 0. \quad (24)$$

方程组(23)可用计算机进行数值解, 求出解后, 即可得到衍射效率

$$\eta = |D(0)|^2 = D_1^2(0) + D_2^2(0). \quad (25)$$

并可由此分析其他光谱特性。

三、关于方程及其解的讨论

(1) 在 Kogelnik 的理论中, 全息图介质的折射率为 $n = n_0 + n_1 \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$, 这是一个典型的周期分布结构, 式中 n_0 为常数。而在本文中, 由(3)式和(4)式可以看出, 折射率除受余弦函数的调制外, 还受一个双曲余弦的调制。折射率的变化如图 3 所示。在折射率型的位相光栅中, 光栅的结构就是折射率的空间分布。因此, 可以得出结论: 由于记录介质吸收的存

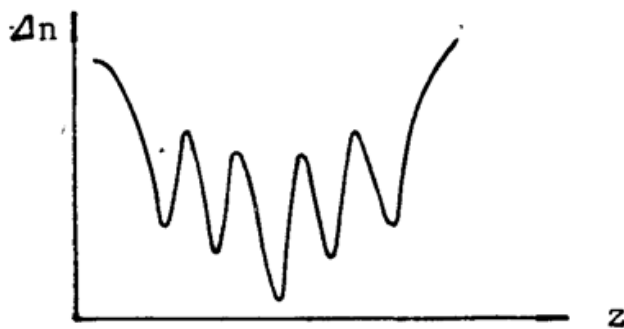


Fig. 3 Variation of refractive index inside the medium of a hologram

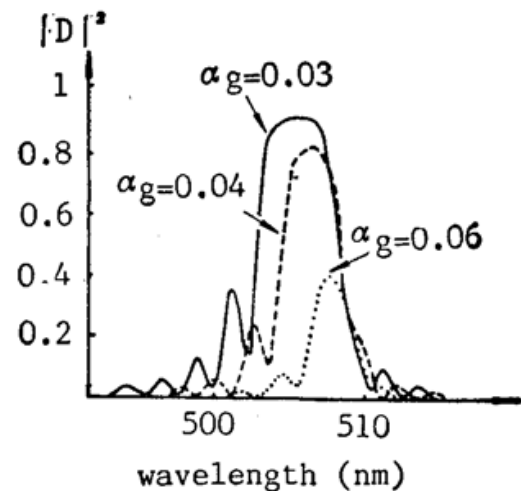


Fig. 4 The calculated spectra of reflective holographic gratings with different absorption of recording medium. Here, $T_0 = 36 \mu\text{m}$, $B_0 = 0.10$, $M_s = 1.05$, $n_0 = 1.50$, $\psi = 5^\circ$, $C_f = C_w = -0.04$

在,使反射式全息光栅成为非均匀结构,不再呈现出严格的周期性。这种光栅结构的非均匀性将对衍射效率和带宽产生影响。实验中用 $12\mu\text{m}$ 厚的介质制作的光栅其带宽在 15nm 左右^[8],用 Kogelnik 的带宽公式计算, $T=12\mu\text{m}$ 时,带宽为 2nm ^[5],与实验相差甚远,而由方程(23)计算所得的结果, $T=12\mu\text{m}$ 时,带宽为 12nm ,与文献[8]中的实验结果已相当接近,这表明非均匀结构模型更符合实际情况。图 4 是记录介质的吸收系数不同时,由方程(23)所得的反射全息光栅光谱特性的理论计算结果。图中,当厚度不变时,衍射效率随吸收系数的增大而减小,这与文献[7]所得的结论是相同的。

(2) 参数 C_f 的影响。全息图介质中折射率的分布由(4)式及(3)式表示为

$$\begin{aligned} n &= n_0 + \Delta n' + \Delta n'' \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \\ &= n_0 + C_f \exp\left(-\frac{\alpha_g T}{2}\right) \cosh\left[\alpha_g \left(\frac{T}{2} - z\right)\right] \\ &\quad + C_e \exp\left(-\frac{\alpha_g T}{2}\right) \cos(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}). \end{aligned} \quad (26)$$

式中 $\Delta n'$ 的形式虽略有不同,通常 $\Delta n' \ll n_0$,故 $\Delta n'$ 可忽略^[3,4,6],即认为 $C_f=0$ 。实验结果表明, C_f 绝对值的量级通常在 10^{-2} 左右,在忽略记录介质吸收的情况下, $\Delta n'$ 确是远小于 n_0 的常数,可将其略去。然而, C_f 与 C_e 为同一数量级,且 $\Delta n'$ 随 z 的变化而改变,故不应将 $\Delta n'$ 忽略。方程(23)的解表明,由于 $\Delta n'$ 的存在, C_f 值的变化对衍射光谱会产生极大的影响。 C_f 为零时,衍射光谱是完全对称的,其对称中心为位于峰值波长处的纵轴。如图 5(a) 所示。若 C_f 取负值,在偏离峰值波长的短波长一侧会出现较高的次峰,如图 5(b) 所示。若 C_f 取正值,则次峰将出现在偏离峰值波长的长波一侧,如图 5(c) 所示。通常所使用的重铬酸盐明胶介质(DGG),其处理后的折射率总小于处理之前^[9],故 C_f 应取负值,因此可以得出结论,用重铬酸盐明胶介质制作的反射式全息光栅,其次峰总是出现在峰值波长的短波一侧。当 C_f 的正、负确定之后,次峰的数目和幅度将随 C_f 绝对值的增大而增大。图 6 给出了 C_f 取不同值时方程(23)的计算结果。图 6 还表明,当 C_f 绝对值增大时,光谱中峰值波长的位置将越来越偏离 $C_f=0$ 时的峰值波长。这是因为, $C_f=0$ 时,光栅为均匀的周期结构,这时

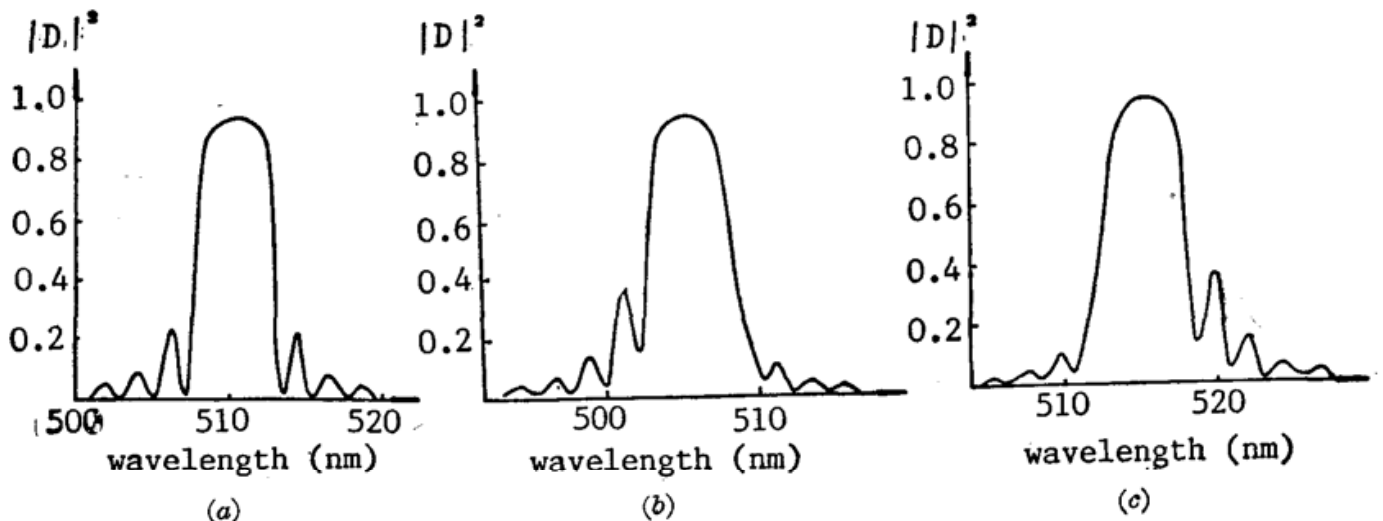


Fig. 5 The spectra of calculated results when

$C_f=0$, $C_f<0$ and $C_f>0$. Here, $T_0=36\mu\text{m}$, $M_s=1.05$, $\alpha_g=0.03'/\mu\text{m}$, $\psi=5^\circ$, $B_0=0.01$, $\eta_0=1.5$, $C_e=0.04$
(a) $C_f=0$, (b) $C_f=-0.04$, (c) $C_f=0.04$

的峰值长即是满足布喇格条件的布喇格波长。而当 $C_f \neq 0$ 时, 光栅成为非均匀结构, 周期性被破坏, 故峰值波长要偏离原布喇格波长, C_f 绝对值越大, 非均匀性越严重, 这种偏离也越大。由图 5 和图 6 可以清楚地看到, 由于 $\Delta n'$ 的影响, 衍射光谱呈现出明显的不对称性。

(3) 参数 C_x 的影响。由 (9) 式可以看出, 对方程 (23) 来说, 耦合程度的强弱 (即耦合系数 K 值的大小) 完全由 $\nu[\nu = (KT/\cos \psi)]$ 决定。因此, $|C_x|$ 较大时, 耦合程度较强, 光栅应有较高的衍射率。图 7 是 C_x 取不同值时的理论计算结果。图 7 还表明, 峰值波长对布喇格条件的偏离 (即峰值波长移动的大小) 随比值 (C_f/C_x) 的增大而增大, 图中的曲线 (1); $C_x = -0.02$; 而曲线 (2), $C_x = -0.04$ 。图 6 中的四条曲线也满足这个关系。

(4) 方程组 (23) 在通常情况下没有解析解, 只能进行数值解。若忽略制作和再现时的吸收, 即令 $\alpha_g = 0$, $\alpha_0 = 0$, 则可得到与 Kogelnik 相同的结果。另外, 方程组 (23) 是由两个非线性非自治微分方程所构成的方程组, 因此不排除这样的可能性: 在适当的参数范围内, 方程组 (23) 的解将呈现出非稳定性^[10]。

(5) 当记录介质的厚度增大时, 由于吸收的影响, 所制成的光栅的非均匀性将更严重。因此, 厚光栅光谱的不对称性较之薄光栅会更加明显。

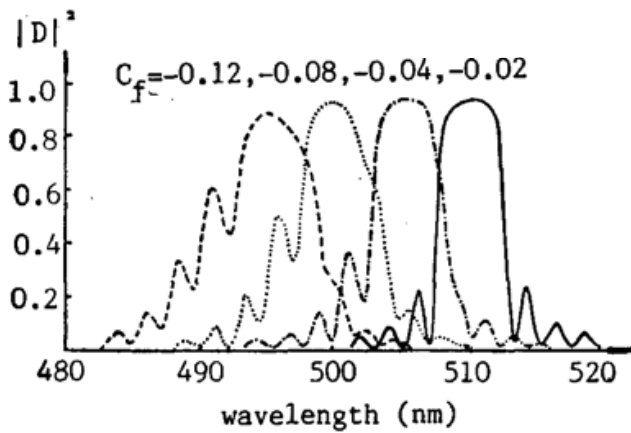


Fig. 6 The spectra of calculated results with the increase of $|C_f|$. Here, $T_0 = 36 \mu\text{m}$, $M_x = 1.05$, $\alpha_g = 0.03' / \mu\text{m}$, $B_0 = 0.10$, $n_0 = 1.50$, $\psi = 5^\circ$, $C_x = -0.04$

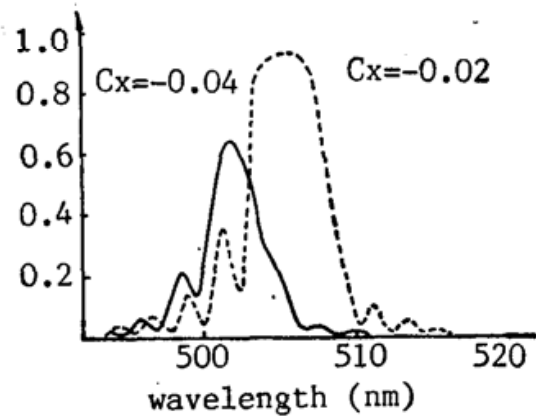


Fig. 7 The spectra of calculated results with different value of C_x . Here, $T_0 = 36 \mu\text{m}$, $M_x = 1.05$, $\alpha_g = 0.03' / \mu\text{m}$, $B_0 = 0.10$, $n_0 = 1.50$, $\psi = 5^\circ$, $C_f = -0.08$

参 考 文 献

- [1] H. Kogelnik; *Bell Syst. Tech. J.*, 1969, **48**, 2909~2947.
- [2] Liu Dahe et al.; *Proc. SPIE*, 1986, **673**, 463~469.
- [3] 唐伟国等;《光学学报》, 1988, **8**, No. 2 (Feb), 152~156.
- [4] T. Kubota; *Appl. Opt.*, 1976, **15**, No. 2 (Feb), 556~574.
- [5] R. J. Collier et al.; *Optical Holography*, (Academic Press Inc., New York, 1971).
- [6] T. Kubota; *Opt. Acta*, 1978, **25**, No. 11 (Nov), 1035~1053.
- [7] 刘大禾等;《北京师范大学学报(自然科学版)》, 1990, No. 1.
- [8] 刘大禾等;《光学学报》, 1990, **10**, No. 2 (Feb), 147~154.
- [9] H. M. Smith;《全息记录材料》, (科学出版社, 北京(中译本)), 第三章.
- [10] 郝柏林;《物理学进展》, 1983, **3**, No. 3 (Jul~Spt), 329~416.

Theoretical analysis on inhomogeneous reflection hologram*

LIU DAHE AND TANG WEIGUO

(Department of Physics, Beijing Normal University)

HE XINGDAO

(Nanchang Aviation College)

(Received 13 October 1989; revised 28 November 1989)

Abstract

A theoretical analysis on inhomogeneous reflection hologram was made in this paper. Taking account of the light absorption of recording medium the coupled wave equation consisting of two linear differential equations was transformed to a non-linear differential equation—Riccati equation. The characteristics of the equation was analysed. From numerical solution, some new significant phenomena were discovered.

Key words: reflection hologram; coupled wave equation; recording medium.

* The project supported by National Natural Science Foundation of China.