

用部分相干光成像理论分析 光栅对假彩色的调节作用

彭 芳 麟

(北京师范大学 物理系)

提 要

基于空间部分相干光成像理论,分析了编码相位片形成的假彩色及振幅光栅和相位光栅对这种假彩色的调节作用,求得了精确解。

关键词: 白光信息处理; 假彩色相位光栅。

一、引 言

自从“光栅编码相位型图像假彩色化技术”被发明以来^[1~3],一直有人在研究开发利用这项技术。最近,文献[4]又提出了一种实时调节假彩色的新方法。

迄今为止,所有文献中的理论分析均是基于光场的振幅分析,这种分析方法和相干光照明下所用的分析方法是完全相同的。考虑到实际使用的白光光源是部分相干光光源,本文用部分相干光成像理论^[5]对这项技术中某些问题进行了讨论,推导出一个极简单的公式。用这个公式来分析光栅编码相位型图像的假彩色,得到了和以前文献相同的结果。如用这个公式来分析振幅光栅对假彩色的调节作用,能求出精确解,从而弥补了文献[4]的某些不足之处,而用这个公式分析相位光栅对假彩色的调节作用,所得结果尚未见报道。

二、原 理

图1为讨论中所使用的 $4f$ 光学系统。 $\sigma(x_0)$ 为空间非相干光源。 $t(x_1)$ 是相位图片的复振幅透过率, $H(x_2)$ 为空间滤波器的复振幅透过率。 P 是成像面。

设 $\sigma(x_0)$ 是均匀的准单色光源,平均波长 λ ,光强 A_λ ,它在 $t(x_1)$ 上产生的光场互强度 J 为(在以下计算中均略去不重要的常数因子)

$$J(x_1, x'_1) = \int A_\lambda \sigma(x_0) \cdot \exp[-j2\pi x_0(x_1 - x'_1)/\lambda f] dx_0. \quad (1)$$

经过相位图片和 $4f$ 系统以后,在成像面 P 上的光强为

$$I_\lambda(x) = \int J(x_1, x'_1) t(x_1) t^*(x'_1) k(x_1, x) k^*(x'_1, x) dx_1 dx'_1. \quad (2)$$

其中 $k(x_1, x)$ 是含有空间滤波器 $H(x_2)$ 的 $4f$ 系统的振幅传递函数

$$k(x_1, x) = \int H(x_2) \cdot \exp[j2\pi x_2(x_1 - x)/\lambda f] dx_{2_0} \quad (3)$$

如果 $\sigma(x_0)$ 是白光光源, 则总光强为

$$I(x) = \int I_\lambda(x) d\lambda_0 \quad (4)$$

将(1), (3)代入(2)得

$$I_\lambda(x) = \int A_\lambda \sigma(x_0) \tilde{t}(\nu_2 + \nu_0) \tilde{t}^*(\nu'_2 + \nu_0) H(x_2) H^*(x'_2) \cdot \exp[-j2\pi x(\nu_2 - \nu'_2)] dx_0 dx_2 dx'_2 \quad (5)$$

其中 \tilde{t} 为 t 的傅里叶变换式, 以下均以符号 \sim 表示相应的傅里叶变换,

$$\begin{aligned} \tilde{t}(\nu_2 + \nu_0) &= \int t(x_1) \exp[-j2\pi x_1(\nu_2 + \nu_0)] dx_1; \\ \nu_i &= x_i/\lambda t, \quad (i=0, 1, 2)。 \end{aligned} \quad (6)$$

(5)式即是部分相干光照明下像面上的光强度公式, 知道 $t(x_1)$ 和 $H(x_2)$ 的具体形式即可利用(5)式进行计算。

$t(x_1)$ 最简单的情况是一个均匀相位光栅, 它相当于光栅编码的阶梯减光板所形成的相位图片中的一阶, 一般的文献都用它作为讨论对象, 可写成:

$$\begin{aligned} t(x_1) &= 1/d \cdot \text{comb}(x_1/d) \otimes g(x_1); \\ g(x_1) &= \begin{cases} 1, & -b \leq x_1 < 0; \\ \exp[jh], & 0 \leq x_1 < a; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

符号 \otimes 表示卷积运算, $g(x_1)$ 表示光栅在一个周期 $d = a + b$ 之内的相位分布情况, h 为相位调制度, $t(x_1)$ 的图像如图 2 所示。将(7)式代入(6)式得

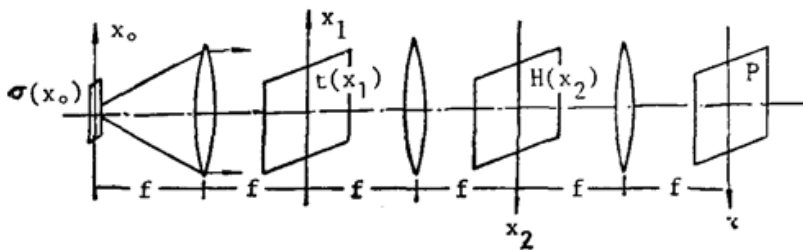


Fig. 1 White-light processing system.

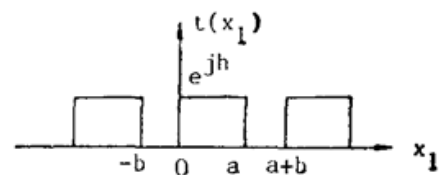


Fig. 2 Profiles of a phasegrating

$$\tilde{t}(\nu_2 + \nu_0) = \text{comb}[d(\nu_2 + \nu_0)] \cdot \tilde{g}(\nu_2 + \nu_0) \quad (8)$$

这是一个无穷级数。将它代入(5)式, 则 $\int \sigma(x_0) \tilde{t} \tilde{t}^* dx_0$ 是 2 个无穷级数之积再和 $\sigma(x_0)$ 作卷积运算, 在一般情形下无法计算。考虑到 $\int \sigma(x_0) \tilde{t} \tilde{t}^* dx_0$ 实际上是部分相干光照明下 x_2 面上的频谱分布^[7], 在光源狭缝足够窄, 光栅频率足够高时, 可以保证频谱是分离的, 从而用空间滤波的方法, 只让其中某一级频谱通过, 即选用合适的 $H(x_2)$, 使得(8)式代入(5)式后成为

$$\begin{aligned} I_\lambda(x) &= \int A_\lambda \sigma(x_0) \sum_n \{ \tilde{g}(\nu_2 + \nu_0) \delta[d(\nu_2 + \nu_0) - n] \cdot \tilde{g}^*(\nu'_2 + \nu_0) \delta[d(\nu'_2 + \nu_0) - n] \} \\ &\quad H(x_2) H(x'_2) \cdot \exp[-j2\pi x(\nu_2 - \nu'_2)] dx_0 dx_2 dx'_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int A_\lambda \sigma(x_0) \tilde{g}(\nu_2 + \nu_0) \delta[d(\nu_2 + \nu_0) - n] \tilde{g}^*(\nu'_2 + \nu_0) \delta[d(\nu'_2 + \nu_0) - n] \\
&\quad \cdot \exp[-j2\pi x(\nu_2 - \nu'_2)] dx_0 dx_2 dx'_2 \\
&= G_n^* G_n \cdot A_\lambda \int \sigma(x_0) dx_0.
\end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$G_n = \tilde{g}(n/d)/d. \tag{10}$$

如果 $\sigma(x_0)$ 是点光源 $\delta(x_0)$, 则(9)式成为

$$I_\lambda(x) = A_\lambda G_n^* G_n.$$

其实这是相干光照明下的光强公式, 和(9)式对比可知, 对于无限大的光栅来说, 空间部分相干光照明只使像面上的光强改变一个常数因子。这就证明了以往文献常用的振幅分析法是合理的, 故计算像面光强时, 只须按(10)式计算 G_n 就可以了。这正是所希望得到的一个极简单的公式。容易证明 G_n 是 $t(x_1)$ 的复指数傅里叶级数的系数。将(7)式中 $g(x_1)$ 的具体形式代入(10)式得

$$\begin{aligned}
G_0 &= [a \exp(jh) + b]/d; \\
G_0^* G_0 &= [a^2 + b^2 + 2ab \cos h]/d^2; \\
G_n &= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{d} \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \exp\left[j\left(\frac{\pi}{2} + \frac{h}{2} - \frac{n\pi a}{d}\right)\right]; \\
G_n^* G_n &= \frac{2}{n^2 \pi^2} \sin^2 \frac{n\pi a}{d} \cdot (1 - \cos h).
\end{aligned} \tag{11}$$

很容易证明, 文献[1~3]在分析光栅编码相位型图像的假彩色时所得的结果和这个结果完全一致。

三、振幅光栅对假彩色的调节作用

文献[4]已经用实验证明可以用光栅来调节假彩色。在原来的光栅编码相位图片上叠加一块振幅光栅, 两块光栅的周期相同。叠加时注意使两块光栅的条纹平行。然后在垂直于条纹的方向上横向移动叠加的振幅光栅, 就能实时地调节这种假彩色。此时两块光栅的总透过率为其各自透过率的乘积。从物理图像上讲, 两块光栅叠加, 实质上等效于一块新的、单周期分布函数 $g(x)$ 不同的相位光栅。只要能写出新的 $g(x)$, 自然可以用(10)式进行分析。

相位光栅透过率仍以(7)式表示, 为了简单, 取 $a = b = d/2$ 。振幅光栅的透过率为

$$\Phi_a(x) = 1/d \cdot \text{comb}(x/d) * g_a(x), \tag{12}$$

$$g_a(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \tag{13}$$

振幅光栅移动 y 以后可以视为 $g_a(x)$ 发生了改变, 变成 $g'_a(x_1)$ 。两个透过率相乘以后形成的新的等效光栅的透过率 $T_1(x)$ 可以写成类似的形式

$$T_1(x) = 1/d \cdot \text{comb}(x/d) * g_1(x_1). \tag{14}$$

$g_1(x)$ 的形式由作图法确定比较方便。在图 3(a)、(b)、(c)中用虚线画了一个相位光栅, 用间断的实线表示振幅光栅相对于相位光栅移动 y 以后的位置, 振幅光栅的初始原点位置标有

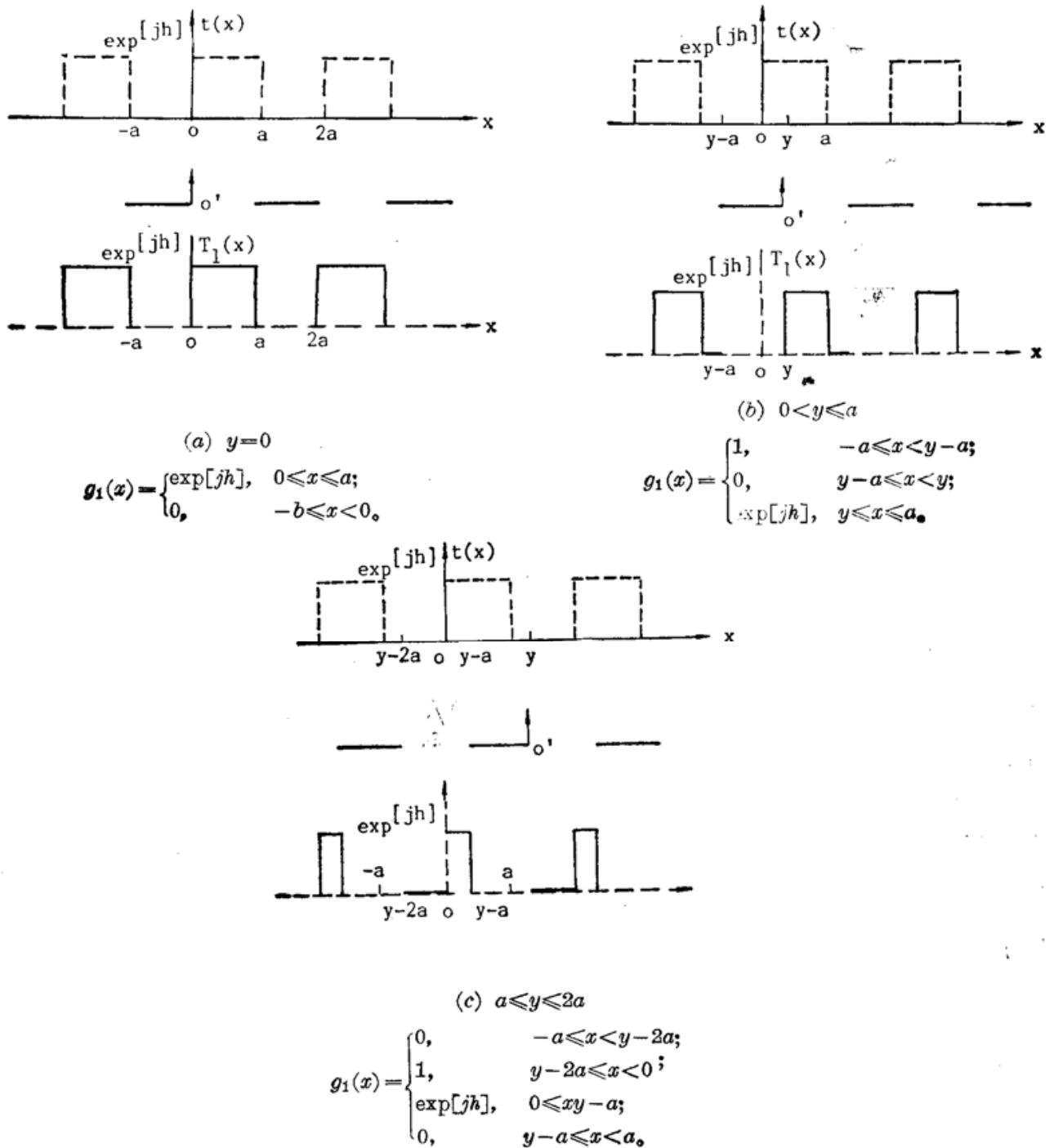


Fig. 3 Profiles of a phase-grating overlapping an amplitude grating

一个箭头，二者叠加后的透过率画在它们下面。从图上看，必须分 $0 \leq y < a$ 和 $a \leq y \leq 2a$ 两种情形对 $g_1(x)$ 加以讨论。由于光栅的平移周期性，当 $y > 2a$ 时不会出现新的情形。

将 $g_1(x)$ 的各种形式代入(10)式进行计算，所得结果如下，注意对 $n=0$ 和 $n \neq 0$ 的情形须分开计算，先讨论 $n=0$ 情形：

对 $0 \leq y < a$,

$$G_0 = [y + (a - y) \exp(jh)] / 2a; \tag{15}$$

$$G_0^* G_0 = [(a - y)^2 + y^2 + 2y(a - y) \cos h] / 4a^2.$$

对 $a \leq y \leq 2a$,

$$G_0 = [(y - a) \exp(jh) + (2a - y)] / 2a; \tag{16}$$

$$G_0^* G_0 = [(y - a)^2 + (2a - y)^2 + 2(2a - y)(y - a) \cos h] / 4a^2.$$

当 $n \neq 0$ 时, 对 $0 \leq y < a$ 和 $a \leq y \leq 2a$ 两种情形求得的 $G_n^* G_n$ 相同。必须分 $n = 2k$ 和 $n = 2k + 1$ 两种情形分别讨论。注意下面 G_{2k} 中的“ $-$ ”、“ $+$ ”号分别对应 $0 \leq y < a$ 和 $a \leq y \leq 2a$ 的情况。

当 $n = 2k$ 时 ($k = 1, 2, \dots$):

$$G_{2k} = \pm \frac{j}{k\sigma} \sin \frac{k\pi y}{a} \sin \frac{h}{2} \exp \left[j \left(\frac{h}{2} - \frac{k\pi y}{a} \right) \right];$$

$$G_{2k}^* G_{2k} = \frac{1}{2k^2 \sigma^2} \left(1 - \cos \frac{2k\pi y}{a} \right) \cdot (1 - \cos h). \quad (17)$$

当 $n = 2k - 1$ 时:

$$G_{2k-1} = \frac{\exp[-j(2k-1)\pi y/2a]}{(2k-1)\pi} \left[-\sin \frac{(2k-1)\pi y}{2a} \right. \\ \left. - j \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2a} \cdot \exp(jh) \right]; \quad (18)$$

$$G_{2k-1}^* G_{2k-1} = \frac{1}{(2k-1)^2 \sigma^2} \left[1 - \sin \frac{(2k-1)\pi y}{a} \sin h \right].$$

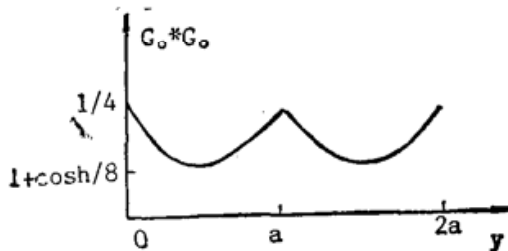


Fig. 4 Theory plot of $G_0^* G_0$ versus y

当 $y = \left(m + \frac{1}{2}\right)a$ 时, 图 4 曲线出现极小值 $G_0^* G_0$

$= (1 + \cos h)/8$, 对比 (11) 式, 光强只有原来的 25%, 所以极易出现黑色。文献[4]的彩色图片已经显示这种结果, 此时色彩变化最大。文献[4]中图 3(a) 的曲线在这些位置也出现了极小值, 只是不易从它的解析表达式看出这个结果。

最后分析 $G_n^* G_n$, 可将它和原相位光栅的光强公式 (11) 式对比。 $n = 2k$ 时, (11) 式等于零, 因为等间隔的光栅总是缺偶数级的衍射条纹, 但 (17) 式表明 $G_{2k}^* G_{2k}$ 是位移 y 的余弦曲线, 周期为 a/k , (17) 式形式和 (11) 式相似, 只是用 y, a 取代了 (11) 式中的 a, d 。 $n = 2k - 1$ 时, $G_{2k-1}^* G_{2k-1}$ 是 y 的正弦曲线, 周期为 $2a/2k - 1$ 。注意文献[4]中所求得 +1 级的 (15) 式, 取 $z = 0$, 即包含在 (18) 式 $n = 1$ 的特例之中。由此可见, 振幅光栅的调色作用是由于光强与位移变量 y 有关。

四、相位光栅对假彩色的调节作用

文献[4]还指出, 如用相位光栅代替振幅光栅来调节假彩色, 则效果更好, 不过文中尚未对此进行理论分析。本文沿用以上方法也对它作一分析。

仍用 (7) 式的形式来表示相位光栅, 那么作为相位图片的相位光栅和作调色用的相位光栅的区别在于单周期函数不同, 设分别为

$$g_h(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x < 0; \\ \exp(jh), & 0 \leq x < a; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

$$g_k(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x < 0; \\ \exp(jk), & 0 \leq x < a; \\ 0, & \text{其他。} \end{cases}$$

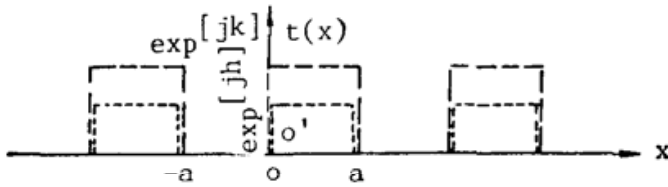
两块光栅叠加以后的透射率可写成

$$T_2(x) = 1/d \cdot \text{comb}(x/d) * g_2(x). \tag{19}$$

这里 $d=2a$ 是光栅的周期。 $g_2(x)$ 的形式用作图法确定。在图 5(a)、(b)、(c) 中, 在一个坐标系中用不同的虚线画出两个有相对位移 y 的相位光栅, 在另一个坐标系中, 画出两者叠加以后的透过率。从图上可以看到, 要分 $0 \leq y < a$ 和 $a \leq y \leq 2a$ 两种情形对 $g_2(x)$ 加以讨论。由于光栅的平移周期性, 当 $y > 2a$ 时, 不会出现别的新情况。

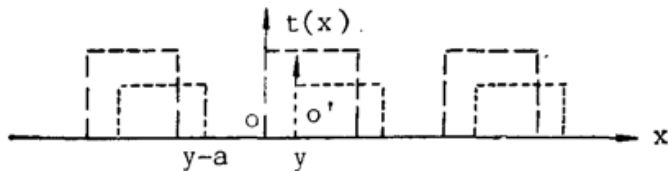
将上面的 $g_2(x)$ 代入(10)式, 算得各种结果如下:

当 $n=0$ 时, 若 $0 \leq y < a$



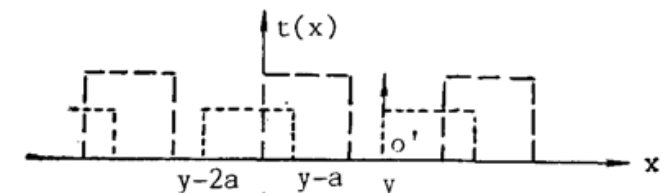
(a) $y=0$

$$g_2(x) = \begin{cases} \exp[j(h+k)], & 0 \leq x \leq a; \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$$



(b) $0 < y \leq a$

$$g_2(x) = \begin{cases} \exp(jk), & -a \leq x < y-a; \\ 1, & y-a \leq x < 0; \\ \exp(jh), & 0 \leq x < y; \\ \exp[j(h+k)], & y \leq x \leq a. \end{cases}$$



(c) $a \leq y \leq 2a$

$$g_2(x) = \begin{cases} 1, & -a \leq x < y-2a; \\ \exp(jk), & y-2a \leq x < 0; \\ \exp[j(h+k)], & 0 \leq x < y-a; \\ \exp(jh), & y-a \leq x \leq a \end{cases}$$

Fig. 5 Profiles of a phase-grating overlapping a phase grating

$$G_0 = \frac{1}{2a} \{y[\exp(jk) + \exp(jh)] + (a-y) \cdot [\exp j(h+k) + 1]\};$$

$$G_0^* G_0 = \frac{1}{4a^2} \{2y^2[1 + \cos(h-k)] + 2(a-y)^2[1 + \cos(h+k)]$$

$$+ 4y(a-y)(\cos h + \cos k)\}. \quad (20)$$

若 $a \leq y \leq 2a$, 则有

$$G_0 = \frac{1}{2a} \{(y-a)[1 + \exp(j(h+k))] + (2a-y)[\exp(jh) + \exp(jk)]\};$$

$$G_0^* G_0 = \frac{1}{4a^2} \{2(y-a)^2[1 + \cos(h+k)] + 2(2a-y)^2[1 + \cos(h-k)]$$

$$+ 4(y-a)(2a-y)(\cos h + \cos k)\}. \quad (21)$$

当 $n \neq 0$ 时, 对 $0 \leq y < a$ 和 $a \leq y \leq 2a$ 两种情形求得的 $G_n^* G_n$ 相同, 必须分 $n=2l$ 和 $n=2l-1$ 两种情形讨论。注意在下面的 G_{2l} 中的“+”、“-”号分别对应 $0 \leq y < a$ 和 $a \leq y \leq 2a$ 的情形。

当 $n=2l(l=1, 2, \dots)$,

$$G_{2l} = \pm \frac{2}{l\pi} \sin \frac{l\pi y}{a} \cdot \sin \frac{h}{2} \cdot \sin \frac{k}{2} \cdot \exp\left[j\left(\frac{h}{2} + \frac{k}{2} - \frac{l\pi y}{2}\right)\right],$$

$$G_{2l}^* G_{2l} = \frac{1}{2l^2 \pi^2} \left(1 - \cos \frac{2l\pi y}{a}\right) (1 - \cos h) (1 - \cos k). \quad (22)$$

当 $n=2l-1$ 时

$$G_{2l-1} = \frac{2}{(2l-1)\pi} \left[\cos \frac{(2l-1)\pi y}{2a} \cdot \sin \frac{h+k}{2} - j \sin \frac{(2l-1)\pi y}{2a} \right.$$

$$\left. \cdot \sin \frac{h-k}{2} \right] \cdot \exp\left[j\left(\frac{h}{2} + \frac{k}{2} - \frac{(2l-1)\pi y}{2a}\right)\right],$$

$$G_{2l-1}^* G_{2l-1} = \frac{4}{(2l-1)^2 \pi^2} \left[\cos^2 \frac{(2l-1)\pi y}{2a} \cdot \sin^2 \frac{h+k}{2} \right.$$

$$\left. + \sin^2 \frac{(2l-1)\pi y}{2a} \cdot \sin^2 \frac{h-k}{2} \right]$$

$$= \frac{2}{(2l-1)^2 \pi^2} \left[1 - \cos h \cdot \cos k + \cos \frac{(2l-1)\pi y}{a} \sin h \sin k \right]. \quad (23)$$

上述结果是一个精确的解析解, 它能表示相位光栅对任何一级频谱的调色效果。由于光强表达式 $G_n^* G_n$ 是变量 h, k, n, y 的函数。在白光照明的条件下, 改变光栅调制度 h 和 k , 改变频谱的级次 n , 改变相对位移变量 y 都会引起 $G_n^* G_n$ 的改变, 从而起到调色的作用, 在此对这个结果作一简单的分析。

1. 在公式(20)~(23)中, 两个相位光栅的作用是完全相同的, 或者说, 在公式中反映两个相位光栅调制度的量 h 和 k 的位置完全对称, 互换以后仍保持公式形式不变。从物理图象讲, 这是合理的。因为讨论中无论指定哪一个光栅作调色光栅, 所得结果应该相同。

2. 当 $y=0$ 和 $y=2a$ 时,

$$G_0^* G_0 = [1 + \cos(h+k)]/2;$$

$$G_{2l}^* G_{2l} = 0;$$

$$G_{2l-1}^* G_{2l-1} = \frac{2}{(2l-1)^2 \pi^2} [1 - \cos(h+k)].$$

和(11)式对照可知,此时叠加光栅等效于一块相位调制度为 $h+k$ 的相位光栅。

当 $y=a$ 时,

$$G_0^* G_0 = [1 + \cos(h-k)]/2;$$

$$G_{2l}^* G_{2l} = 0;$$

$$G_{2l-1}^* G_{2l-1} = \frac{2}{(2l-1)^2 \pi^2} [1 - \cos(h-k)].$$

此时叠加光栅等效于一块相位调制度为 $h-k$ 的相位光栅。这个结果表明,光强只跟相位光栅的一个周期中两部分的相位之差有关。所以我们在讨论相位光栅时,总是把共同的常数相位因子去掉,而保留不同的部分。

3. $G_0^* G_0$ 是 y 的二次曲线,从(20)、(21)式可以判断, $G_0^* G_0$ 的曲线在 $0 < y < a$ 和 $a < y < 2a$ 两段内对直线 $y=a$ 是对称的。由 2. 的计算结果可知, $y=0$ 和 $y=2a$ 时, $G_0^* G_0$ 的值是相同的,它们不同于 $y=a$ 时的 $G_0^* G_0$ 值。所以曲线的周期为 $2a$ 。此外,曲线的极值点与 h 、 k 有关。

归纳以上的讨论可知,相位光栅作为相位图像所产生的颜色,取决于它的周期性质,而叠加一块光栅会改变这种周期性质,所以可用光栅调色。

参 考 文 献

- [1] 郭履蓉等;《光学学报》,1984, 4, No.2 (Feb), 145~147.
- [2] 张静江等;《光学学报》,1985, 5, No.10 (Oct), 944~947.
- [3] 龚谦等;《光学学报》,1984, 4, No.8 (Aug), 687~693.
- [4] 周英等;《光学学报》,1989, 9, No.1 (Jan), 43~49.
- [5] M. Born and E. Wolf; 《Principles of Optics》, (6th ed., Pergamon Press, 1980), 529.

Theoretical analysis on the adjustable pseudo-coloring with a grating

PENG FANGLIN

(Department of Physics, Beijing Normal University)

(Received 17 July 1989; revised 28 November 1989)

Abstract

Based on the theory of partial coherence, the theoretical explanation of the pseudo-coloring by an encoded phasepicture and the adjustable pseudo-coloring by a amplitude grating or a phase grating is made.

Key words: white-light processing system; pseudo-coloring; phase grating.