

一种适于光学实现的非线性神经网络模型及其蒙特卡洛学习算法

黄五群 高成群 陈天伦 胡北来
(南开大学 物理系)

张 延 忻
(南开大学 现代光学研究所)

提 要

本文用计算机仿真研究了一种适于光学实现的非线性神经网络模型的存储容量 α 和寻址能力, 提出了一个改进其触突互联矩阵的蒙特卡洛学习算法。数值研究表明, 经过学习修正后的神经网络模型的寻址能力及存储容量都有较大的改进。

关键词: 非线性神经网络, 存储容量, 寻址能力, 蒙特卡洛学习算法。

一、引 言

目前的电子计算机在模型识别方面远不能适应实际需要, 更不能与人的智能相比, 例如, 识别一条跳动的鱼, 计算机远不如三岁儿童。因此, 模拟人类大脑的功能来研制神经网络计算机, 是人们一直在追求的目标。

自从1982年Hopfield^[1]提出了他的神经网络模型以来, 人们对它作了许多改进, 同时也提出了若干其他类型的神经网络模型^[2]。各种神经网络模型的共同特点是网络中各神经元之间的触突互联以及网络状态的叠代演变。由此产生的大量神经元网络的集体功能, 可具有某些类似大脑的分布存储、联想记忆以及容许局部神经元失效或出错的容错能力。例如, Hopfield模型中的第 i 个神经元与第 j 个神经元之间的互联权重或触突互联矩阵元为:

$$T(i, j) = \begin{cases} \sum_{\mu=1}^M \xi_i^{\mu} \cdot \xi_j^{\mu}, & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases} \quad (1)$$

式中 ξ_i^{μ} 为第 μ 个存储模式所对应的第 i 个神经元的状态, 取值 +1(兴奋) - 1(抑制); M 为存储模式的数目, N 为神经元的总数。由(1)式可知, $T(i, j)$ 的取值范围为 $[-M, +M]$ 。

将此神经网络看做 N 个自旋的动力学系统, 则在输入任意初始状态后, 系统状态将按下列动力学规则演变^[3]:

$$S_i(t+1) = \text{Sgn} \left[\sum_{j=1}^N T(i, j) \cdot S_j(t) \right], \quad 1 \leq i, M \leq N \quad (2)$$

式中 $S_j(t)$ 为第 t 次叠代第 j 个神经元的状态, Sgn 为符号函数, 即:

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

当 $M \ll N$ 时, 系统将收敛于最接近于初始状态的那个存储模式。

用光学技术来实现神经网络模型的特点是: 信息容量大, 运算速度快, 不存在导线连接的困难等, 但也存在其特有的不足, 如: 光学记录介质的动态范围小, 数值精度较差, 数值的正负值表示较困难以及输入输出接口问题等。例如 Psultis 等人^[4]用光学矩阵相乘技术实现的光学神经网络, 其互联矩阵元数值用光学模板的透过率来表示, 在 M 的数值较大时, 光学模板的动态范围将难以满足 $(2M+1)$ 个灰度等级的要求。

Van Hemman 等人^[5]提出并研究了一种非线性神经网络模型, 其触突互联矩阵元为:

$$J(i, j) = \phi[T(i, j)], \quad (3)$$

式中 $T(i, j)$ 是由(1)式决定的 Hopfield 模型或线性神经网络的互联矩阵元; $\phi(x)$ 为 x 的任意非线性函数。

作为非线性神经网络的一个特例, 当取

$$J(i, j) = \begin{cases} \text{Sgn}\left(\sum_{\mu=1}^M \xi_i^{\mu} \cdot \xi_j^{\mu}\right), & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad (4)$$

时, 互联矩阵元 $J(i, j)$ 的值只取 ± 1 或 0 , 且与网络中的存储模式数目 M 无关。这种非线性神经网络的互联矩阵显然是易于用光学模板来实现的。同时, 互联矩阵元 $J(i, j)$ 取值 $+1$ 或 -1 使神经网络的状态叠代过程归结为简单的逻辑运算, 因此也是用微电子数方法实现所期望的。这里, 我们权且称之为适于光学实现的非线性神经网络。

Van Hemman 等人^[5]从理论上研究了非线性神经网络的固定点方程求解及其解的稳定性等问题。本文则用计算机仿真的方法研究了这种适于光学实现的非线性神经网络的存储容量和寻址能力, 并且提出一种蒙特卡洛学习算法对其互联矩阵进行优化。仿真计算表明, 经过学习而修正了其互联矩阵后, 网络的存储容量和寻址能力都得到了明显的提高。

二、计算机仿真及其结果

我们在 M-340 电子计算机上对适于光学实现的非线性神经网络模型进行仿真研究, 所得结果如下:

1. 存储容量 α_c

为了说明存储容量 α_c 的含义, 首先定义神经网络的两个状态模式 S 和 S' 之间的重叠度 $q(S, S')$ ^[6], 它反映两模式间的相似程度:

$$q(S, S') = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \cdot S'_i. \quad (5)$$

对于 M 个随机的存储模式 ξ^{μ} , $\mu = 1, 2, \dots, M$ 来说, 由(4)式可算出神经网络的互联矩阵元 $J(i, j)$, 这里的随机模式是指其第一分量 ξ_i^{μ} 等几率地取值 $+1$ 或 -1 , 用 $J(i, j)$ 代替(2)式中的 $T(i, j)$ 即得非线性神经网络的状态叠代公式。取任一存储模式 ξ^{μ} 作为初始模式,

经过状态叠代达到稳定后,即可按(5)式计算此稳定模式与 ξ^μ 之间的交叠 q ,对不同的 M 值,分别取1000组不同的随机存储模式,可以求出以所有可能的存储模式为初始模式所得到的交叠的平均值 $\langle q \rangle$ 。图1给出当 $N=100$ 时,平均交叠 $\langle q \rangle$ 与参数 $\alpha=(M/N)$ 的关系曲线。显然,在神经元总数一定时, $\langle q \rangle$ 随存储模式数目 M 的增大而减小。定义 $\langle q \rangle=0.99$ 时的 α 值为该神经网络的存储容量,记为 α_c ,它表示了神经网络对输入的初始模式能够作出正确识别的信息容量。在这一内容寻址再现精度下,网络的最大可存储的模式数为 $M=\alpha_c N$ 。

由图1可见,对未经蒙特卡洛学习修正的非线性神经网络(实线), $\alpha_c=0.08$,小于Amit等人^[6]所得到的Hopfield模型的存储容量0.138。

为了考察 α_c 与神经元数 N 的关系,本文曾对 $N=25, 50, 100, 200, 400$ 和 800 时的 α_c 值进行过仿真测量,在此范围内,没有发现 α_c 随 N 变化的趋势。

2. $\alpha_c \sim P_n$ 曲线和寻址能力

为了考察适于光学实现的非线性神经网络模型在有噪声情况下的寻址能力,我们在每个存储模式中用 N' 个随机数 ± 1 来代替该模式中的相同数目的分量,并用它作为带有比噪声为 $P_n=(N'/N)$ 的初始模式,按上节中的仿真算法,求在不同的 α 值下的 $\langle q \rangle$,并从而得到 $\alpha_c \sim P_n$ 曲线,如图2所示。

显然,在图2中曲线左边的区域,系统总能实现对初始模式的正确识别($\langle q \rangle \geq 0.99$);而在曲线右边的区域,则不能得到完满的识别($\langle q \rangle < 0.99$)。由图2可见,适于光学实现的非线性神经网络模型的抗噪声能力是比较强的。

三、蒙特卡洛学习算法

正如Amit和Gutfreund^[6]所指出的,Hopfield模型的存储容量受到存储模式之间的交叠的限制。这种限制也自然影响到适于光学实现的非线性神经网络的存储容量。

1988年,Gardner和Derrida^[7]对于 $J(i, j) = \pm 1$ 的触突互联矩阵做了解析研究,其做法是把触突互联矩阵元 $J(i, j)$ 视为一个自旋,触突互联矩阵对应于一个自旋的组态 $\{J(i, j)\}$,该自旋系统的配分函数为:

$$Z(\beta) = \langle \exp[-\beta \cdot P_{wi}(\{J(i, j)\})] \rangle, \quad (6)$$

式中 $\langle \rangle$ 表示对自旋系统的所有组态求平均, $\beta=(1/T)$, T 是自旋系统的温度。式中 $P_{wi}(\{J(i, j)\})$ 为与第 i 个神经元状态出错的几率成正比的量以后简记为 P_{wi} 。

$$P_{wi} = \sum_{\mu=1}^M \left[1 - \Theta \left(\xi_i^\mu \sum_{j \neq i}^N J(i, j) \xi_j^\mu - K \right) \right], \quad (7)$$

式中 $\Theta(x)$ 定义为:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (8)$$

对于存储模式 ξ^μ 来说,作用于第 i 个神经元的局域场 h_i^μ (为方便起见,差一个常数因子 N)为:

$$h_i^\mu = \sum_{j \neq i}^N J(i, j) \xi_j^\mu, \quad (9)$$

(7)式表明,仅当 $\xi^{\mu} h_i^{\mu} > K$ 时, ξ^{μ} 中的第 i 个神经元的状态才不会出错。这里的 K 是一个与神经元的阈值成正比的量。

Gardner 如 Derrida 用 replica 方法分析了 $\langle P \rangle$ 为最小的自旋组态的解及其稳定性。结论是,使 $\langle P_{wi} \rangle$ 为最小的 $\{J^*(i, j)\}$ 必须用数值方法求得,而且是不稳定的。

本文把在统计力学和格点规范理论^[8]中广泛应用的蒙特卡洛方法^[9]用于以(6)式为配分函数的自旋系统 $\{J(i, j)\}$, 得到 P_{wi} 为最小的自旋组态 $\{J^*(i, j)\}$, 作为适用于光学实现的神经网络模型修正后的触突互联矩阵了,称获得 J 的方法为蒙特卡洛学习方法。

本文的蒙特卡洛学习过程如下:以(4)式求得的互联矩阵 $J(i, j)$ 为初始自旋组态 $\{J(i, j)\}$, 取 $K=0, 1N (N=100)$, 以(7)式作为自旋系统的哈密顿量,做 $T=0$ 的蒙特卡洛模拟,求出能使 P 为零的自旋组态 $\{J^*(i, j)\}$ 。

以 $J^*(i, j)$ 代替 $J(i, j)$ 作为神经网络的互联矩阵,则网络性能改善的情况如下。

1. 改进后的存储容量 α_c^*

用 J 代替 J 后,重复上节的仿真计算表明,改进后模型的存储容量 α_c^* 确有提高,提高的多少与存储模式和神经元的数目有关。一般地说,在 $N \leq 100$ 时, N 越小提高得越明显, α_c^* 约是 α_c 的 1.2~2.5 倍。图 1 中的虚线给出 $N=100$ 时,对一千个随机存储模式的平均结果。由图 1 可见 $\alpha_c^* \approx 0.10$ 。

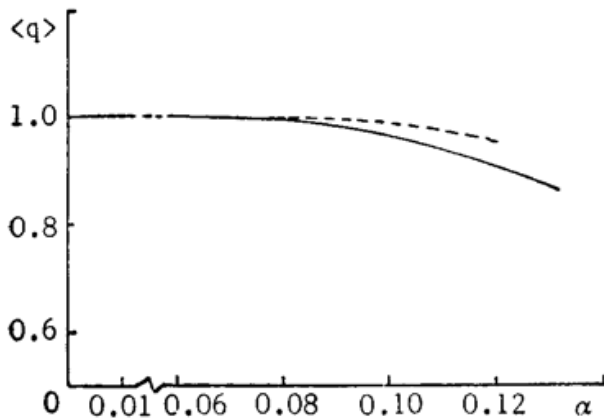


Fig.1 The dependence of average overlap $\langle q \rangle$ on α . solid: before learning; dashse: after learning.

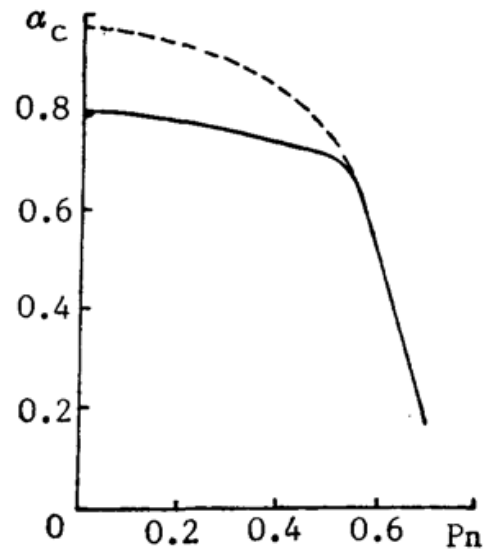


Fig.2 Influence of input noise P_n onto α_c . solid: before learning; dashes: after learning

2. 改进后的寻址能力

对改进后的模型,重复上节关于有随机噪声时的寻址能力的计算,可得 $\alpha_c^* \sim P_n$ 曲线,在图 2 中用虚线表示。由图 2 可见,在 α 值较大的范围,经过学习后的模型的寻址能力有显著增强。

四、结 论

本文研究的非线性神经网络模型的互联矩阵元 $J(i, j) = \pm 1$, 与存储模式数 M 无关,

这不仅适用于光学实现,也适用于微电子技术实现,由于其叠代过程只要求作逻辑运算,因而可以大大提高运算速度。

数值研究表明,此模型的存储容量 α 略低于 Hopfield 模型,而抗噪声的寻址能力高于 Hopfield 模型。由于光学技术易于实现较大的神经元数 N ,所以 α 值较小在实践上不是一个严重的问题。至于互联矩阵中的负值问题,引入 $J'(\dot{i}, j) = J(\dot{i}, j) + 1$ 即可避免^[10]。这时,神经元状态叠代方程式(2)中将增加一项随叠代次数而变的阈值 $B_i(t)$,即:

$$S_i(t+1) = \text{Sgn} \left[\sum_{j \neq i}^N J'(\dot{i}, j) S_j(t) - B_i(t) \right], \quad (10)$$

式中

$$B_i(t) = \sum_{j \neq i}^N S_j(t). \quad (11)$$

Gardner 和 Derrida^[7] 用 replica 方法证明,自旋组态为 $\{J(\dot{i}, j)\}$ 的系统,在以(9)式为配分函数时,可使 $P_{wt}[J(\dot{i}, j)] = 0$ 的自旋组态是不稳定的。在本文的模拟计算中,曾用随机的自旋组态作为初始组态进行蒙特卡洛计算,没有找到可使 $P_{wt} = 0$ 的稳定组态,这与文献[7]的结论是一致的。然而,正如本文的研究所表明的那样,当选择由(4)式所给出的 $\{J(\dot{i}, j)\}$ 为初始组态时,使 $P_{wt} = 0$ 的稳定组态 $\{J^*(\dot{i}, j)\}$ 是可以得到的。

本文提出的这种蒙特卡洛学习算法亦可用于其他神经网络模型的优化处理中去。

参 考 文 献

- [1] J. J. Hopfield; *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.*, 1982, **79**, 2554.
- [2] 王宝翰;《生物物理学报》, 1989, **5**, 89.
- [3] W. Kinzel, *Z. Phys.; B-Condensed Matter*, 1985, **60**, 205.
- [4] D. Psaltis and N. H. Farhat; *Optics Letters*, 1985, **10**, 98.
- [5] J. L. Van Hemman, D. Grensing, A. Huber and R. Kuhn; *J. Stat. Phys.* 1988, **50**, 259.
- [6] D. J. Amit and H. Gutfreund; *Ann. Phys.*, 1987, **173**, 30.
- [7] E. Gardner and B. Derrida; *J. Phys. (A): Math. Gen.*, 1988, **21**, 271.
- [8] 陈天伦,黄五群,郑希特;《高能物理与核物理》,1985, **9**, 41。
陈天伦,黄五群,金 柯,索存川;《高能物理与核物理》,1989, **13**, 188。
Ke Jin, Tian-lun Chen and Wu-qunHuang; *J. Phys. (A): Math. Gen.*, 1989, **22**, 4179.
- [9] N. Metropolis *et al.*; *J. Chem. Phys.*, 1953, **21**, 1087.
- [10] N. H. Farhat *et al.*; «1986, in *Neural Networks for computing* Ed. J. Penkar», (Amer. Inst. Phys., New York), 146~152.

A nonlinear neural network suitable for optical implementation and its Monte Carlo algorithm

HUANG WUQUN, GAO CHENGQUM, CHEM TIANLUN AND HU BEILAI

(Department of Physics, Nankai University, Tianjin)

ZHANG YANXIN

(Institute of Modern Optics, Nankai University, Tianjin)

(Received 15 August 1989; revised 11 December 1989)

Abstract

The storage capacity α_c and addressability of a nonlinear neural network suitable for optical implementation have been studied by means of computer simulation. A Monte Carlo algorithm to improve its synaptic interconnection matrix is proposed. The storage capacity and addressability of the neural network after Monte Carlo learning process are both improved considerably.

Key words: nonlinear neural networks; storage capacity; addressability; Monte Carlo learning algorithm.