

# 一种研究指数型梯度折射率纤维 的新方法——准锥形等效法\*

廖廷佛 林金豆

(福建师范大学 激光研究所,福州)

## 提 要

基于纤维的折射率分布特性,本文提出了一种研究指数型梯度折射率纤维透镜的新方法——准锥形等效法。并分析了这种研究方法的适用性。

关键词: 梯度折射率; 光纤; 自聚焦透镜。

## 一、引 言

目前,梯度折射率光学的研究集中在微型光学器件及其在办公设备、集成光学和光通信等方面的应用<sup>[1]</sup>。多数应用场合都需要大数值孔径和高像质性能的梯度折射率透镜。近年来,一种等折射率面为圆锥面的纤维——锥形梯度折射率纤维透镜,由于其小端具有比大端更大的成像孔径和视场的独特优点而逐渐引起国内外的兴趣<sup>[2~6]</sup>。这种新颖透镜在上述领域具有广阔的应用前景。然而,在锥形梯度折射率棒的拉制中,由于工艺的局限性,其实际折射率分布往往偏离理想的分布形式,等折射率面一般不再是准确的锥面,而有可能近似呈指数型变化<sup>[7]</sup>。本文基于纤维的折射率分布特征,提出了一种研究指数型梯度折射率纤维透镜的新方法——准锥形等效法。文中给出指数型梯折纤维的一种准锥形纤维等效模型,并分析了这种等效法的适用性。

## 二、指数型梯度折射率纤维的准锥形等效

考虑指数型梯度折射率纤维,其厚度为  $d$ , 两平行平面端面分别位于坐标  $z$  轴上的  $z=0$  和  $z=d$  处,大端、小端的半径分别为  $r_{e1}$  和  $r_{e2}$ 。取直角坐标系  $(x, y, z)$ , 且  $z$  轴与纤维的光轴重合,则指数型梯度折射率纤维的折射率分布可表示为<sup>[7]</sup>。

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 - g^2(z)(x^2 + y^2)]。 \quad (1)$$

式中  $n_0$  为纤维轴中心处的折射率,  $g(z)$  为纤维的轴向梯度参数

$$g(z) = \frac{g_0}{\exp(-z/L_e)} = \frac{g_0}{t(z)}, \quad (2)$$

$$t(z) = \exp\left(-\frac{z}{L_e}\right) \quad (0 < z \leq d)。 \quad (3)$$

式中  $g_0 = g(0)$ ,  $L_e$  为描述纤维折射率沿轴向按指数变化的几何参数,由(1)、(2)式知,折射率沿  $z$  轴呈指数梯减。

由(1)、(2)式可得指数型梯度折射率纤维的等折射率面方程

$$r_1 = r_0 \exp(-z/Le) \quad (4)$$

式中  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ,  $r_0$  为等折射率面参数。(4) 式表明, 等折射率面为指数型曲面族。因之, 把这种纤维称为“指数型”梯度折射率纤维。如图 1 所示为指数型梯度折射率纤维及其等折射率面分布。下面讨论这种纤维的“准锥形”等效原理和方法, 从而将指数型纤维透镜的研究化为已知的锥形纤维问题。

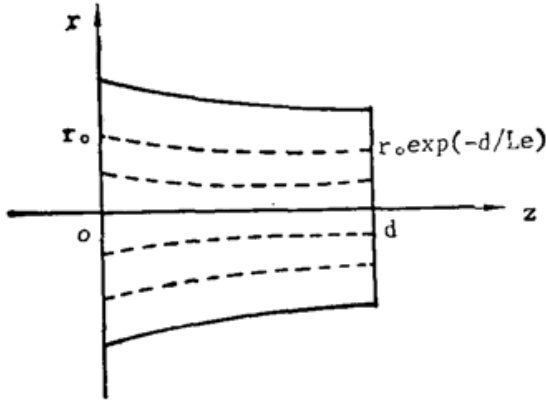


Fig. 1 The exponential-type GRIN fiber with its equi-index surfaces

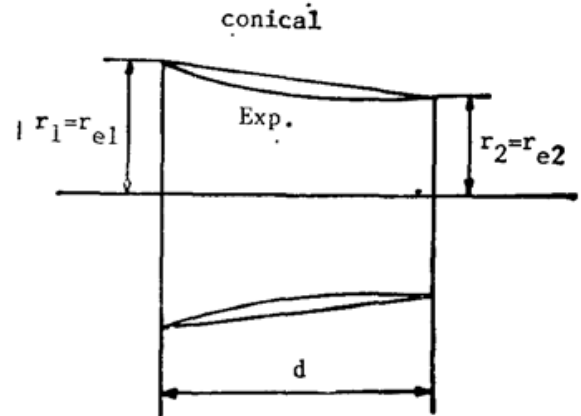


Fig. 2 An equivalent quasi-conical GRIN fiber of the exponential-type fibre

当纤维参数  $Le$  其厚度  $d$  相比足够大时,  $z \ll Le$ , 因而  $\exp(-z/Le) \simeq 1 - \frac{z}{Le}$ , (2)、(4)

式化为

$$g(z) = \frac{g_0}{1 - z/Le}, \quad (5)$$

$$r_0 = r_0 \left(1 - \frac{z}{Le}\right). \quad (6)$$

虽然(5)、(6)式表示与指数型纤维有相同的  $g_0$  且  $L = Le$  的锥形梯度折射率纤维的梯度参数和等折射率面方程<sup>[3]</sup>。

进一步的研究表明, 指数型梯度折射率纤维可以用如图 2 所示的一种准锥形梯度折射率纤维来等效。其  $n_0$ 、 $g_0$  与指数型的相同, 其余的几何参数如下:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= r_{e1}, \\ r_2 &= r_{e2} = r_{e1} \exp(-d/Le), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$L = \frac{d}{1 - r_2/r_1} = \frac{d}{1 - \exp(-d/Le)}. \quad (8)$$

由(4)、(6)式可求得在  $d \ll Le$  条件下的准锥形纤维与指数型纤维间的等折射率面相对

$$\text{误差} \left[ \frac{\Delta r}{r_0} \right] = \frac{r_0 - r}{r_0};$$

$$\left[ \frac{\Delta r}{r_0} \right] \doteq -\frac{1}{2} \left( \frac{z}{Le} \right)^2 + \left( 1 - \frac{Le}{L} \right) \left( \frac{z}{Le} \right), \quad (9)$$

虽然, 当  $z = Le \left( 1 - \frac{Le}{L} \right)$  时有

$$\left[ \frac{\Delta r}{r_0} \right]_{\max} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{Le}{L} \right). \quad (10)$$

将(8)式的  $L$  代入(9), (10)式, 并将  $\exp\left(-\frac{d}{Le}\right)$  按幂级数展开保留至三次方项可得:

$$\left[\frac{\Delta r}{r_1}\right]_{\max} = \frac{1}{8} \left(\frac{d}{Le}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{d}{Le}\right)\right]^2. \quad (11)$$

根据折射率精度要求(取决于成像精度), 等折射率面误差有一容限  $\left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_M$ , 当  $\frac{d}{Le}$  满足

$$\left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_{\max} \leq \left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_M$$

$$\frac{d}{Le} \leq \sqrt{8} \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)_M} \quad (12)$$

时, 指数型梯度折射率纤维可以视为和指数型纤维具有相同的  $n_0, g_0$  且几何参数由(7)、(8)式确定的等效锥形梯度折射纤维(或称为准锥形纤维)。这样, 就把指数型纤维透镜的研究简化为锥形纤维问题, 从而可利用文献[2~6]的现成结果进行成像分析和元件设计。

(12)式表示准锥形等效法的适用条件, 在(12)式推导中, 作了近似  $\left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_{\max} \simeq \frac{1}{8} \left(\frac{d}{Le}\right)^2$ 。实际上,  $\frac{d}{Le}$  的容限要比(11)式的略大一些。从(11)式可知, 等折射率面误差随着  $\frac{d}{Le}$  的减小而减小, 即  $\frac{d}{Le}$  越小的指数型纤维用准锥形纤维等效的精度越高。

现对上述等效法的适用性作进一步的分析。由(1)式将折射率  $n$  对  $r$  微分可求得纤维径向位置误差对折射率分布的影响

$$\left[\frac{\Delta n}{n_0}\right] = g^2(z) r^2 \left[\frac{\Delta r}{r}\right].$$

利用(2)式并计及  $r = r_1 \exp(-z/Le)$ , 则有  $g(\gamma)r = g_0 r_1$ , 从而上式表示为

$$\left[\frac{\Delta n}{n_0}\right] = (g_0 r_1)^2 \left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]. \quad (13)$$

如果已知折射率精度要求  $\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)$ , 则由(13)式可求得等折射率面误差容限  $\left(\frac{\Delta r}{r_0}\right)_M$

$$\left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_M = \frac{1}{(g_0 r_1)^2} \left[\frac{\Delta n}{n_0}\right] = k \left[\frac{\Delta n}{n_0}\right]. \quad (14)$$

根据现有日本板玻璃工厂生产的微透镜棒(“Selfoc”商标)及中科院西安光机所研制的自聚焦透镜等产品的有关参数可算得  $k = \frac{1}{(g_0 r_1)^2} \simeq 4 \sim 100$ 。如取  $\frac{\Delta n}{n_0} = 4 \times 10^{-4}$  (1~2类光学玻璃), 则由(14)式有  $\left[\frac{\Delta r}{r_0}\right]_M = (16 \sim 400) \times 10^{-4}$ , 将此值代入(12)式即可求得适用条件  $\frac{d}{Le} \leq (11 \sim 60) \%$ , 我们可以根据指数型纤维  $\frac{d}{Le}$  的大小和成像精度要求(或  $\frac{\Delta n}{n_0}$  要求)来确定准锥形等效法的适用与否。

### 三、准锥形等效法的应用例

设有一指数型梯度折射率纤维, 其折射率分布由(1)、(2)式给出, 其中  $n_0 = 1.5722$ ,  $g_0 = 0.1732$ ,  $Le = 15.0$ ,  $d = 1.50$ ,  $r_1 = 1.50$ 。利用(7)、(8)式可求得准锥形纤维的有关几何参数, 列入表1。

Table 1 The geometrical parameters of a quasi-conical GRIN fiber (in: mm)

	Exp-type fiber	Quasi-conical fiber
radius of big top $r_1$	1.50	1.50
radius of small top $r_2$	1.357	1.357
thickness $d$	1.50	1.50
parameter $L$	15.0	15.762
taper $m = \frac{r_1 - r_2}{d}$	—	0.095

表 2 给出了上述指数型梯度折射率纤维透镜的主面、焦面及焦距计算结果。其中第一行是根据本文的准锥形等效法以及文献 [3] 的锥形纤维结果计算的, 而第二行是利用文献 [7] 的精确解析法算出的, 并利用了文献 [4] 的有关高斯参数计算公式。

Table 2 The calculated gaussian parameters by the "quasi-conicalness" method

	$l_f$	$l'_f$	$l_h$	$l'_h$	$f' = -f$
Quasi-conicalness method	-12.454	12.486	0.496	-0.464	12.950
Analytical method	-12.473	12.480	0.497	-0.460	12.940

从表 2 结果可知, 用准锥形等效法求出的高斯参数与用解析法的精确结果十分吻合, 每一个量的绝对误差均小于 0.10 mm。对于本例,  $g_0 r_1 = 0.2598$ , 由 (12) 式可求得适用条件  $\frac{d}{Le} \leq 0.22$ 。而已知  $\frac{d}{Le} = 0.10$ , 故指数型纤维完全可以用准锥形纤维来等效, 即等效法适用。表 2 结果正说明了这点。这样, 本文提出的指数型纤维的准锥形等效研究法的可行性又得到了例证。

表 3 给出了几种具有不同  $\frac{d}{Le}$  值 ( $d$  均为 1.5 mm, 但  $Le$  不同) 的指数型纤维 ( $n_0, g_0$  与  $r_1$  同前), 用准锥形等效法求得的焦距  $f'$ , 并与解析法的精确结果  $f'_e$  作了比较, 求得焦距相对误差  $\left(\frac{\Delta f'}{f'_e}\right)$  随  $\left(\frac{d}{Le}\right)$  的变化。这里的  $\left(\frac{\Delta f'}{\Delta f'_e}\right)$  也表示成像计算精度要求。

Table 3 The focal-length errors for fibers with different  $d/Le$ 

$\frac{d}{Le}$	$f'_e$	$f'$	$\left(\frac{\Delta f'}{\Delta f'_e}\right) \times 100\%$
0.50	8.395	8.731	3.99
0.30	10.611	10.631	0.18
0.20	11.657	11.733	0.65
0.10	12.940	12.950	0.08
0.04	13.728	13.741	0.10
0.02	13.985	14.016	0.22

分析表 3 结果, 可得如下结论:

1. 当  $\left(\frac{d}{Le}\right)$  减小时,  $\left(\frac{\Delta f'}{f'_e}\right)$  也随之而减小。说明  $\frac{d}{Le}$  越小时, 用准锥形等效法处理指数型纤维的精度越高, 这与前面的理论分析相吻合。但表中的  $\frac{\Delta f'}{f'_e}$ , 由于当  $\left(\frac{d}{Le}\right) \leq 0.20$  时,

适用条件(即  $\frac{d}{Le} \leq 0.22$ )已得到较好的满足,而且在计算  $f_e'$  时贝塞尔函数值的误差对  $(\frac{\Delta f'}{f_e'})$  的影响大于  $(\frac{d}{Le})$  的因素,以致  $(\frac{\Delta f'}{\Delta f_e'})$  在小于 1% 范围内变化。

2. 从表中结果还可推知,对于  $n_0, g_0, r_1, d$  一定的纤维,当  $\frac{d}{Le} \leq 0.30$  时有  $(\frac{\Delta f'}{f_e'}) \leq 1\%$ 。或换言之,如要求成像精度  $\frac{\Delta f'}{f_e'} \leq 1\%$ ,则指数型纤维的参数  $Le$  或  $\frac{d}{Le}$  应满足条件  $\frac{d}{Le} \leq 0.30$ 。这与前面根据折射率精度要求  $\frac{\Delta n}{n_0} = 4 \times 10^{-4}$  求得的适用条件  $\frac{d}{Le} \leq 0.22$  是基本一致的。可见,成像计算精度  $\frac{\Delta f'}{f_e'} \leq 1\%$  与折射率精度  $\frac{\Delta n}{n_0} = 4 \times 10^{-4}$  的要求是近似相对应的。

#### 四、结 论

综上所述,我们提出了一种研究指数型梯度折射率纤维的新方法——准锥形等效法。从理论及应用实例论证了准锥形等效研究法的可行性和适用性。指出在满足(12)式条件下,指数型纤维与准锥形纤维之间是可以互相等效的。这一结论有两个方面的实际意义。其一是很显然的,即可以把指数型梯度折射率纤维的研究简化为锥形纤维问题,为成像分析和元件设计带来方便。

另一方面,本文的研究也为锥形梯度折射率纤维的折射率分布的“指数型”误差容限的确定提供了一定的理论依据。这一问题对锥形纤维的拉制工艺有着重要意义。在锥形梯度折射率纤维的拉制中,由于工艺的局限而拉成了一定的指数型纤维,但只要所形成的指数型纤维的参数  $Le$  与厚度  $d$  相比足够大而能满足(12)式条件,这样的指数型纤维仍可视作锥形纤维。即一定的“指数型”折射率分布制备误差是不可避免的,但也是允许的。若从成像精度要求出发,例如要求  $(\frac{\Delta f'}{f_N'}) \leq (\frac{\Delta f'}{f_N'})_{\max}$ ,则由此可推算得  $\frac{d}{Le}$  的最大允许值  $(\frac{d}{Le})_{\max}$ ,将此值代入(11)式可求得等折射率面的误差容限  $[\frac{\Delta r}{r_0}]_{\max}$ ,然后进一步由(12)式确定锥形梯度折射率纤维的折射率允许误差  $(\frac{\Delta n}{n_0})_{\max}$ 。例如,若要求  $(\frac{\Delta f'}{f_e'}) \leq 1\%$ ,则由表 3 得  $\frac{d}{Le} \leq 0.30$  由此可求得锥形纤维的折射率允差  $(\frac{\Delta n}{n_0})_{\max} = (3.5 \sim 6.0) \times 10^{-4}$ 。

此外,本文的结论还可推广至柱形梯度折射率纤维的情形。因当  $Le \rightarrow \infty$  时,(2)式中  $\exp(-\frac{z}{Le}) \rightarrow 1$ ,则  $g(z) \equiv g_0$ ,即指数型纤维化为柱形纤维的特例。因此,只要(12)式条件能得到很好地满足,则指数型纤维可等效为柱形纤维。由此可见,对指数型梯度折射率纤维的研究具有一定的重要意义和普遍意义。而且,本文提出的既可行又方便的“准锥形等效研究法”还可推广用于其它非圆柱形梯度折射率纤维的研究。

## 参 考 文 献

- [1] D. C. Leiner; *Appl. Opt.*, 1988, **27**, No. 3 (Feb), 451.  
[2] 殷宗敏等;《物理学报》, 1981, **30**, No. 12 (Dec), 1603~1608.  
[3] C. G. Reino *et al.*; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 7 (Apr), 1107~1109.  
[4] C.G. Reino *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 19 (Oct), 3418~3424.  
[5] 廖廷倬;《中国激光》, 1989, **16**, No. 5 (May), 267~271.  
[6] 廖廷倬等;《光学学报》, 1989, **9**, No. 9 (Sep), 836~842.  
[7] C. Gomez Reino *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 7 (Apr), 1076~1078.

**“Quasi-taper” equivalent method—a new approach  
to the study of exponential-type GRIN fiber lens**

LIAO TINGDI AND LIN JINDOU

(*Institute of Lasers, Fujian Normal University, Fuzhou*)

(Received 17 May 1989; revised 17 October 1989)

**Abstract**

Based on the characteristics of refractive-index distribution, a new method is presented in this paper for the study of exponential-type GRIN fiber lens by considering the fiber as a “Quasi-tapered” GRIN fiber. The applicability of this method is analysed.

**Key words:** gradient index; optical fiber.