

全息干涉计量中干涉计量场的统计特性

方 强 谭玉山

(西安交通大学 机械系)

提 要

本文运用统计学方法推导了全息干涉计量中散斑计量场的统计特性。证明了：干涉计量场的复振幅为复圆高斯随机变量；干涉计量场强度的概率密度服从负指数分布；散斑干涉计量场的系综平均值代表变形信息。

关键词：全息干涉计量；散斑统计。

一、引 言

散斑现象是电磁波在某些传播环境下所固有的一种现象，在无线电频段，这种现象早为人们所认识，并作了大量的研究。用光频波段的散斑现象只是在本世纪60年代激光出现以后才开始为人们所重视。全息干涉计量则是激光应用中自始至终伴有散斑的一种典型技术。由于被测表面散射的光为散斑波面，全息干涉计算是一种典型的散斑波面的干涉。近20多年来，全息干涉计量技术有了较大的发展，诸如二次曝光、实时、时场、频闪、移相及锁相等许多方法^[1~5]，并运用统计学工具对光频波段的散斑现象进行了大量的研究，形成了较为完善的理论体系及研究方法^[6,7]，本文运用散斑统计光学理论，将散斑波面作为随机波面，研究两散斑波面的干涉计量问题。

二、像面散斑场复振幅的统计特性

全息干涉计量中信息的表征过程可由图1来进行描述。在相干光照明下，由物表面散射出的变形前后的复振幅分别为 $A_1(\vec{r}_0)$ 及 $A_2(\vec{r}_0)$ 的二光场同时存在于物表面 \vec{r}_0 上，经成像系统传播后在其共轭像面上形成的合成光场的复振幅分布为

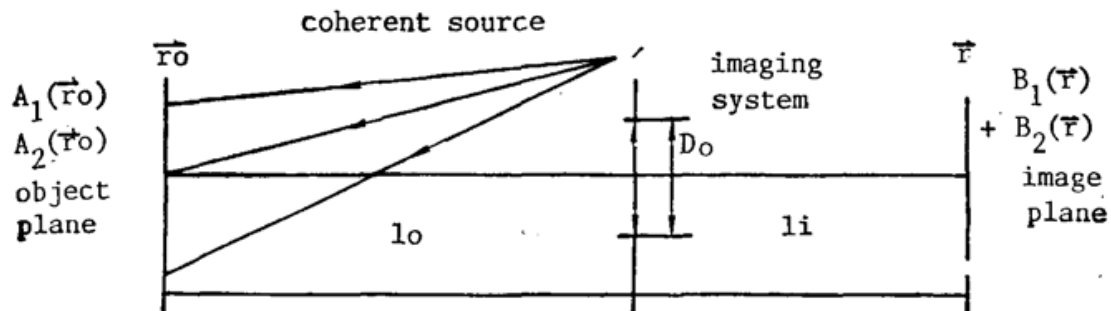


Fig. 1 Optical arrangement for holographic interferometry

$$B(\mathbf{r}) = B_1(\mathbf{r}) + B_2(\mathbf{r}), \quad (1)$$

其中 $B_i(\mathbf{r})$ 与 $A_i(\mathbf{r}_0)$ 相对应, 它们之间有如下联系

$$B_i(\mathbf{r}) = \iint A(\mathbf{r}_0) h(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) d\mathbf{r}_0, \quad i=1, 2 \quad (2)$$

上式中 $h(\mathbf{r}_0; \mathbf{r})$ 为传播权函数, 对于通常的小视场小相对孔径对称系统, 该函数具有空间位移不变性, 并为一实函数, 即 $h(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) = h(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) = h^*(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})$ 。符号 * 表示复共轭运算。由于变形前后二光场之间具有某种关联性, 变形信息将以条纹的形式表征在 $B(\mathbf{r})$ 所形成的光强 $I_B(\mathbf{r})$ 中。

从统计的角度, $B_i(\mathbf{r})$ 、 $B(\mathbf{r})$ 及 $I_B(\mathbf{r})$ 都是随机场, 当对 $I_B(\mathbf{r})$ 这个随机场进行信息识别时, 有关该干涉计量场的统计特性及代表信息分布的量这两方面的知识是必须的。下面首先依据散斑统计光学理论, 描述在图 1 所示的传播状态下像面散斑场复振幅的统计特性。

根据光的传播规律, 当某个面上光场特性确定后, 其他面上的光场特性也就随之确定。在全息干涉计量中, 光场的随机性来自于物表面的随机性, 显然物表面散射场的统计特性将决定后续光场的特性。设物体表面散射光场的复振幅分布为

$$A_0(\mathbf{r}_0) = a(\mathbf{r}_0) \exp[i\phi(\mathbf{r}_0)], \quad (3)$$

对于全息干涉计量中所测的光学粗糙表面的散射光场, 可以作三点假设:

- (1) 复振幅的幅值 $a(\mathbf{r}_0)$ 与位相 $\phi(\mathbf{r}_0)$ 相互统计独立;
- (2) 散射表面足够粗糙, 以致可以认为 $\phi(\mathbf{r}_0)$ 均匀分布在 $[-\pi, \pi]$ 上;
- (3) $A_0(\mathbf{r}_0)$ 的相关面元相对于成像系统点扩散函数在物面上的有效覆盖区域来说足够小而与照明波长相比足够大, 以至可以近似地看成点, 其相关函数为

$$\langle A_0(\mathbf{r}_{01}) A_0^*(\mathbf{r}_{02}) \rangle = \delta(\mathbf{r}_{01} - \mathbf{r}_{02}), \quad (4)$$

式中符号 $\langle \rangle$ 表示系综平均。这些假设是对实际情况的一种极限抽象, 长期以来的实际工作证明, 这样的描述是足够精确的。可以证明^[6], 由 $A_0(\mathbf{r}_0)$ 在像面上引起的光场复振幅为零均值复圆高斯随机变量。该类复随机变量的实部和虚部具有均值为零、方差相等及互不相关等特性, 其实部 $B_0^R(\mathbf{r})$ 与虚部 $B_0^I(\mathbf{r})$ 的联合概率密度函数和方差 $\sigma^2(\mathbf{r})$ 分别为

$$P[B_0^R(\mathbf{r}), B_0^I(\mathbf{r})] = \frac{1}{2\pi\sigma^2(\mathbf{r})} \exp\left\{-\frac{[B_0^R(\mathbf{r})]^2 + [B_0^I(\mathbf{r})]^2}{2\sigma^2(\mathbf{r})}\right\}, \quad (5)$$

$$\sigma^2(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}) d\mathbf{r}_0. \quad (6)$$

三、全息干涉计量场统计特性

对于干涉计量场, 关心的是复振幅 $B(\mathbf{r})$ 和强度 $I_B(\mathbf{r})$ 的特性, 前者是描述光特性的最本质的量, 而后者是需要实测的量。设物体变形前表面光场复振幅为

$$A_1(\mathbf{r}_0) = a(\mathbf{r}_0) \exp[i\phi(\mathbf{r}_0)], \quad (7)$$

物体表面的三维变形场在直角坐标轴 x_0 、 y_0 和 z_0 方向上的分量场分别为 $u(\mathbf{r}_0)$ 、 $v(\mathbf{r}_0)$ 及 $w(\mathbf{r}_0)$ 。由于全息干涉计量总是测量小变形, 可以认为物体表面的变形并不改变散射光场相关面元的特性, 而只引起相关面元位置的变化, 变形后的光场复振幅可表示为

$$A_2(\mathbf{r}_0) = A_1[\mathbf{r}_0 - \mathbf{d}(\mathbf{r}_0)] \exp\{-i\Delta[\mathbf{r}_0 - \mathbf{d}(\mathbf{r}_0)]\}, \quad (8)$$

$$\Delta(\mathbf{r}_0) = \frac{2\pi}{\lambda} [au(\mathbf{r}_0) + bv(\mathbf{r}_0) + cw(\mathbf{r}_0)], \quad (9)$$

式中 $\mathbf{d}(\mathbf{r}_0)$ 为 $u(\mathbf{r}_0)$ 及 $v(\mathbf{r}_0)$ 构成的面内变形矢量, $\Delta(\mathbf{r}_0)$ 为变形引起的相位变化。由于通常照明光源距物面的距离远大于照明区域的线度, 在整个物面上参数 a, b, c 均可视为常数, 下面推导 $B(\mathbf{r})$ 及 $I(\mathbf{r})$ 的统计特性。

1. 干涉计量场复振幅 $B(\mathbf{r})$ 的圆对称性讨论

复随机变量的圆对称性涉及到其实部和虚部的均值、二阶矩及二者之间的互相关值。由于 $B(\mathbf{r})$ 的二分量 $B_1(\mathbf{r})$ 和 $B_2(\mathbf{r})$ 均为复圆高斯随机变量, 它的实部 $B^R(\mathbf{r})$ 和虚部 $B^I(\mathbf{r})$ 的均值均为零, 而 $B^R(\mathbf{r})$ 的二阶矩为

$$\langle [B^R(\mathbf{r})]^2 \rangle = \langle [B_1^R(\mathbf{r})]^2 \rangle + \langle [B_2^R(\mathbf{r})]^2 \rangle + 2\langle B_1^R(\mathbf{r})B_2^R(\mathbf{r}) \rangle, \quad (10)$$

(10) 式中前二项为 $B_1^R(\mathbf{r})$ 和 $B_2^R(\mathbf{r})$ 的二阶矩, 也就是它们的方差, 已由 (6) 式给出。第三项互相关函数可表示为

$$\langle B_1^R(\mathbf{r})B_2^R(\mathbf{r}) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle A_1^R(\mathbf{r}_{01})A_2^R(\mathbf{r}_{02}) \rangle h(\mathbf{r}_{01} - \mathbf{r})h(\mathbf{r}_{02} - \mathbf{r})d\mathbf{r}_{01}d\mathbf{r}_{02}, \quad (11)$$

根据假设和三角公式不难证明

$$\langle A_1^R(\mathbf{r}_{01})A_2^R(\mathbf{r}_{02}) \rangle = \frac{1}{2} \delta[\mathbf{r}_{01} - \mathbf{r}_{02} + \mathbf{d}(\mathbf{r}_{02})] \cos \Delta[\mathbf{r}_{02} - \mathbf{d}(\mathbf{r}_{02})], \quad (12)$$

将 (12) 式代入 (11) 式并考虑到在通常情况下, $h(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r})$ 在 \mathbf{r}_0 上的有效覆盖区域很小, 位相函数 $\Delta(\mathbf{r}_0)$ 在该区域内不变, 于是得

$$\langle B_1^R(\mathbf{r})B_2^R(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \cos \Delta(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r}_0)h[\mathbf{r}_0 - \mathbf{d}(\mathbf{r}_0)]d\mathbf{r}_0. \quad (13)$$

将 (6) 式和 (13) 式代入 (10) 式, 最终得到 $B^R(\mathbf{r})$ 的二阶矩为

$$\langle [B^R(\mathbf{r})]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\mathbf{r}_0)d\mathbf{r}_0 + \cos \Delta(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r}_0)h[\mathbf{r}_0 - \mathbf{d}(\mathbf{r}_0)]d\mathbf{r}_0. \quad (14)$$

通过类似的推导, 可以证明, $B(\mathbf{r})$ 虚部 $B^I(\mathbf{r})$ 的二阶矩与 (14) 式相同; 而 $B^R(\mathbf{r})$ 与 $B^I(\mathbf{r})$ 的互相关值为零。

综上所述, 得到: 随机变量 $B(\mathbf{r})$ 具有圆对称性。

2. 干涉计量场复振幅实部的联合概率密度函数

首先推导 $B^R(\mathbf{r})$ 的概率密度函数, 由上节知, $B_1^R(\mathbf{r})$ 与 $B_2^R(\mathbf{r})$ 均为高斯随机变量, 根据概率论, 它们的联合概念密度函数为

$$P[B_1^R(\mathbf{r}), B_2^R(\mathbf{r})] = \frac{1}{2\pi\sigma\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{[B_1^R(\mathbf{r})]^2 + [B_2^R(\mathbf{r})]^2 - 2\rho B_1^R(\mathbf{r})B_2^R(\mathbf{r})}{2(1-\rho^2)\sigma^2}\right\}, \quad (15)$$

式中 σ^2 仍由 (6) 式所示的方差。 ρ 为随机变量的相关系数, 由 (13) 式它可表示为

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{\langle B_1^R(\mathbf{r})B_2^R(\mathbf{r}) \rangle}{\sigma^2} = \cos \Delta(\mathbf{r}) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r}_0)h[\mathbf{r}_0 - \mathbf{d}(\mathbf{r}_0)]d\mathbf{r}_0}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\mathbf{r}_0)d\mathbf{r}_0}. \quad (16)$$

为了求 $B^R(\mathbf{r})$ 的概率密度分布, 通过关系

$$\left. \begin{aligned} B^R(\mathbf{r}) &= B_1^R(\mathbf{r}) + B_2^R(\mathbf{r}), \\ B_w &= B_2^R(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

所确定的 Jacobian 变换及(15)式, 先求 $B^R(\mathbf{r})$ 与 B_w 的联合概率密度函数, 然后利用边缘概率密度函数求 $B^R(\mathbf{r})$ 的概率密度分布, 不难证明

$$P[B^R(\mathbf{r})] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{2[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{[B^R(\mathbf{r})]^2}{4[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2} \right\}. \quad (18)$$

类似地可以证明 $B^I(\mathbf{r})$ 也服从(18)式所示的高斯概率密度分布。由于 $B(\mathbf{r})$ 具有圆对称性, $B^R(\mathbf{r})$ 与 $B^I(\mathbf{r})$ 的联合概率密度函数

$$P[B^R(\mathbf{r}), B^I(\mathbf{r})] = \frac{1}{2\pi\{2[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2\}} \exp \left\{ -\frac{[B^R(\mathbf{r})]^2 + [B^I(\mathbf{r})]^2}{4[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2} \right\}. \quad (19)$$

表明, 复随机变量 $B(\mathbf{r})$ 为零均值复圆高斯随机变量。

3. 干涉计量场强度的概率密度分析

由于干涉计量场强度 $I_B(\mathbf{r})$ 和相位 $\theta_B(\mathbf{r})$ 与复振幅的实, 虚部之间有如下联系

$$\left. \begin{aligned} B^R(\mathbf{r}) &= \sqrt{I_B(\mathbf{r})} \cos \theta_B(\mathbf{r}), \\ B^I(\mathbf{r}) &= \sqrt{I_B(\mathbf{r})} \sin \theta_B(\mathbf{r}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

利用(19)和(20)式, 可得强度和位相的联合概率密度函数为

$$P[I_B(\mathbf{r}), \theta_B(\mathbf{r})] = \frac{1}{8\pi[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{I_B(\mathbf{r})}{4[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2} \right\}. \quad (21)$$

由边缘概率密度分布与联合概率分布的关系可以证明, 相位 $\theta_B(\mathbf{r})$ 为均匀分布在 $[-\pi, \pi]$ 上的随机变量。强度 $I_B(\mathbf{r})$ 的概率密度函数为

$$P[I_B(\mathbf{r})] = \begin{cases} \frac{1}{4[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{I_B(\mathbf{r})}{4[1+\rho(\mathbf{r})]\sigma^2} \right\}, & [I_B \geq 0] \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases} \quad (22)$$

(22)式表明, 干涉计量场强度服从负指数分布。

至此, 已得到干涉计量场的基本统计特性, 下面讨论在干涉计量场中什么量代表变形信息。由(23)式可知, 计量场强度的系综平均值为

$$\langle I_B(\mathbf{r}) \rangle = 4\sigma^2[1+\rho(\mathbf{r})] = 4\sigma^2 \left\{ 1 + \cos \Delta(\mathbf{r}) \frac{\int_{-\infty}^{\infty} h(\mathbf{r}_0) h[\mathbf{r}_0 - \mathbf{d}(\mathbf{r}_0)] d\mathbf{r}_0}{\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\mathbf{r}_0) d\mathbf{r}_0} \right\}. \quad (23)$$

上式表明, 干涉计量场的系综平均值不为常数, 它由变形场及系统参数决定。对于确定的计量系统, 该系统平均值只由变形量决定。反过来, 就可得到: 干涉计量场中代表信息的量是它的系综平均信息。(23)式实际上就是干涉计量中信息的分布模型, 它显然与传统的分析给出的信息分布有差别。进一步分析可得到有关计量的更具体的结论。根据上述结论, 显然, 信息的识别是从单一非平稳样本场中所进行的统计识别。

四、总 结

本文将全息干涉计量做为随机干涉计量过程, 运用统计学方法分析了干涉计量场的统计特性, 得到以下结论: (1) 全息干涉计量场复振幅为零均值复圆高斯随机变量; (2) 全息干

涉计量场强度服从负指数概率密度分布; (3) 全息干涉计量场为非平稳场, 其系综平均值代表了变形信息, 信息的识别为对单一样有计量场进行的统计识别。

参 考 文 献

- [1] P. L. Powell, K. A. Stetson; *J. O. S. A.*, 1965, **55**, No. 12 (Dec), 1593~1598.
- [2] C. W. Vest; *Holographic Interferometry*, (Wiley, New York, 1978).
- [3] P. K. Erf; *Holographic Nondestructive Testing*, (Academic Press., New York, 1974).
- [4] D. R. MacQuigg; *Appl. Opt.*, 1977, **16**, No. 2 (Feb), 291~292.
- [5] S. Nakada, H. Saito *et al.*; *Opt. Acta*, 1986, **33**, No. 10 (Oct), 1295~1309.
- [6] J. C. Dainty; *Laser Speckle & Related Phenomena*, (Springer Verlag New York, 1975).
- [7] 刘培森; *散斑统计光学基础*, (科学技术出版社, 北京, 1987)。

Statistical properties of the interferometric field in holographic interferometry

FANG QIANG AND TAN YUSHAN

(Department of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an)

(Received 14 May 1989; revised 31 October 1989)

Abstract

The statistical properties of the complex amplitude and the intensity of the interferometric field in holographic interferometry are derived by means of the statistical method. It is shown that the complex amplitude is a zero-mean circular complex Gaussian random process, the intensity obeys a negative exponential probability density function and the ensemble average of the intensity represents the deformation information.

Key words: holographic interferometry; statistics of speckle.