

宏观可分辨量子态的产生和检测

朱 本 源

王 宗 麓

(中国计量学院 物理室, 杭州)

(福建省三明师范专科学校 物理系)

提 要

本文利用 $SO(3)$ 旋转群性质得到了非线性双折射介质模型的一个严格解。由此证明相干态进入双折射介质后将产生宏观上可分辨的量子叠加态。为检测它们所产生的干涉条纹, 本文采用零拍检测方案, 计算了初态为线偏振和圆偏振相干光时零拍检测器输出流的几率分布。

关键词: 宏观可分辨量子态; 双折射介质; 零拍检测。

一、引 言

近年来, Milburn 和 Holmes^[1] 等人提出通过某种非线性相互作用可以产生宏观上可分辨的量子态, 这是非线性光学领域的一个新现象。Yurke 和 Stoler^[2] 指出, 为了产生干涉条纹, 相干态通过某种非线性介质作用, 初态必将演化为相干的量子叠加态。这一结论在非简谐振子模型和推广的非简谐振子模型中得到证实。最近, Mecozz^[3] 等人又提出了非线性双折射光学介质模型, 描写这个非线性模型的有效哈密顿为*

$$H = \omega(a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2) + K(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2) + \frac{\Omega}{2}(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2)^2, \quad (1)$$

式中 a_1, a_2 为进入双折射介质相干光相互垂直的两个偏振模, ω 为它们的频率。 K, Ω 分别为与一级、三级极化率张量成比例的非线性作用强度, 如果仅考虑 $K=0$, 此时非线性项为

$$H_1 = \frac{\Omega}{2}(a_2^\dagger a_1 + a_1^\dagger a_2)^2, \quad (2)$$

包括了四波混频非线性作用项^[4] $(\Omega/2)(a_1^\dagger a_1^\dagger a_2 a_2 + a_1 a_1 a_2^\dagger a_2^\dagger)$ 和克尔 (Kerr) 效应的非线性作用项^[5] $\Omega(a_1^\dagger a_1 a_2^\dagger a_2)$ 。文献[3]采用高斯积分方法得到了此模型的一个解。本文将采用狄克 (Dicke) 基矢展开, 利用 $SO(3)$ 旋转群的性质, 得到这个非线性双折射介质模型的严格解。并证明在某些特殊的作用时间下, 相干态进入双折射介质将演化为有限个相干的量子叠加态。这种相干的量子叠加态将产生干涉条纹, 为了观测干涉条纹, 本文采用零拍检测方案, 计算了初态为线偏振和圆偏振相干光时零拍检测器输出流的几率分布, 并进行了简单讨论。

二、非线性模型的严格解

首先引进角动量算子 J_x, J_y, J_z 以及 $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ ^[6]

收稿日期: 1988年12月12日; 收到修改稿日期: 1989年9月25日

* 此处令 $\hbar=1$ 。

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_1 + a_1 a_2^\dagger), \\ J_y &= -\frac{i}{2}(a_2^\dagger a_1 - a_1^\dagger a_2), \\ J_z &= \frac{1}{2}(a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_1), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \\ J_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 $|j, m\rangle$ 为狄克态, a_1, a_2 为进入双折射介质相干光相互垂直的两个偏振光模, 相应的粒子数本征方程为

$$a_i^\dagger a_i |n_2, n_1\rangle = n_i |n_2, n_1\rangle, \quad i=1, 2 \quad (5)$$

如果令 $j = (1/2)(n_2 + n_1)$, $m = (1/2)(n_2 - n_1)$, 则下列对应关系成立^[6]

$$|n_2, n_1\rangle \iff |j, m\rangle. \quad (6)$$

这样粒子数本征态可用狄克态来表示, 在相互作用表象中, 哈密顿量 H_1 可用角动量算子表示为

$$H_1 = 2\Omega J_x^2, \quad (7)$$

在这个 H_1 作用下, 初态 $|in, 0\rangle$ 将演化为末态 $|out, t\rangle$

$$|out, t\rangle = \exp(-i2\Omega J_x^2 t) |in, 0\rangle. \quad (8)$$

假设初态是两个相干态 $|\alpha\rangle_{a_1}, |\beta\rangle_{a_2}$ 的直积, 分别为进入介质相干光的相互垂直两个偏振方向

$$|in, 0\rangle = |\alpha\rangle_{a_1} \otimes |\beta\rangle_{a_2}, \quad (9)$$

将相干态展开成粒子数态, 并利用对应关系(6)式, 得到初态展开成狄克态为

$$|in, 0\rangle = \exp\left[-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right] \sum_{j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots} \sum_{m=-j}^j \frac{\alpha^{j+m} \beta^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}} |j, m\rangle, \quad (10)$$

引入转动算子的矩阵元

$$d_m^j(\theta) = \langle j, m' | \exp(-i\theta J_y) | j, m \rangle. \quad (11)$$

根据 $SO(3)$ 群的数学机制, $\exp[-i(\pi/2)J_y]$ 是绕 y 轴旋转 $(\pi/2)$ 的操作, 考虑到(10)式和(11)式, 并利用恒等式 $\sum_m |j, m\rangle \langle j, m| = 1$, 则(8)式写为

$$\begin{aligned} |out, 0\rangle &= \exp\left[-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right] \sum_{j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots} \sum_{m=-j}^j \frac{\alpha^{j+m} \beta^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}} \\ &\times \exp\left(i\frac{\pi}{2} J_y\right) \sum_{m'} \exp(-i2\Omega m'^2 t) d_{m', m}^j\left(\frac{\pi}{2}\right) |j, m'\rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

在几个特定作用时间下, 上式可严格求解

(1) 如果 $t = (4\pi/\Omega)$, 因 $\exp(-i2\Omega m'^2 t) = 1$, 由(12)式得

$$\begin{aligned} \left|out, \frac{4\pi}{\Omega}\right\rangle &= \exp\left[-\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{2}\right] \sum_{j=0, \frac{1}{2}, 1, \dots} \sum_{m=-j}^j \frac{\alpha^{j+m} \beta^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{1/2}} |j, m\rangle \\ &= |\alpha\rangle_{a_1} \otimes |\beta\rangle_{a_2}. \end{aligned} \quad (13)$$

这表明以 $t = (4\pi/\Omega)$ 为周期, 末态 $|out, t\rangle$ 仍为相干态的直积。

(2) 如果 $t = (\pi/\Omega)$, 若 j 为整数, 则 $\exp(-i2\Omega m'^2 t) = 1$; 若 j 为半整数, 则

$\exp(-i2\Omega m'^2 t) = -i$, 并将其转换到相干态表象, 则(12)式可写为

$$\left| \text{out}, \frac{\pi}{2\Omega} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left| \alpha \right\rangle_{a_1} \otimes \left| \beta \right\rangle_{a_1} + \exp\left(i\frac{\pi}{4}\right) \left| -\alpha \right\rangle_{a_1} \otimes \left| -\beta \right\rangle_{a_1} \right\}. \quad (14)$$

这是两个相位差 π 量子态的相干迭加态。

(3) 如果 $t = (\pi/2\Omega)$, 若 j 为整数, 则 $\exp(-i2\Omega m'^2 t) = (-1)^{m'}$, 若 j 为半整数, 则 $\exp(-i2\Omega m'^2 t) = \exp[-i(\pi/4)]$, 利用 $\langle j, m' | \exp(-i\pi J_z) \exp[-i(\pi/2) J_y] | j, m \rangle = (-1)^{m'} d_{m', m}^j(\pi/2)$, 以及 $\exp[i(\pi/2) J_y] \exp(-i\pi J_z) \exp[-i(\pi/2) J_y] = \exp(i\pi J_x)$, 且转换到相干态表象, 于是(12)式写为

$$\begin{aligned} \left| \text{out}, \frac{\pi}{2\Omega} \right\rangle = & \frac{1}{2} \left\{ \left[\left| i\beta \right\rangle_{a_1} \otimes \left| i\alpha \right\rangle_{a_1} + \left| -i\beta \right\rangle_{a_1} \otimes \left| -i\alpha \right\rangle_{a_1} \right] \right. \\ & \left. + \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left[\left| \alpha \right\rangle_{a_1} \otimes \left| \beta \right\rangle_{a_1} - \left| -\alpha \right\rangle_{a_1} \otimes \left| -\beta \right\rangle_{a_1} \right] \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

(15)式表明, 在 H_1 作用下, 相干态的初态将演化为有限个宏观上可分辨量子态的相干迭加, 如果初态是线偏振相干光, 即 $\beta = 0$, (15)式又可简化为

$$\left| \text{out}, \frac{\pi}{2\Omega} \right\rangle = \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left(\left| \alpha \right\rangle_{a_1} - \left| -\alpha \right\rangle_{a_1} \right) \otimes \left| 0 \right\rangle_{a_1} + \left| 0 \right\rangle_{a_1} \otimes \left(\left| i\alpha \right\rangle_{a_1} + \left| -i\alpha \right\rangle_{a_1} \right) \right\}, \quad (16)$$

(16)式与文献[3]的结果完全一致。而本文用完全不同的方法得到的(15)式是一个更为普遍的结果。

三、零拍检测

上节讨论可知, 相干光进入非线性双折射介质后将演化为宏观上可分辨量子态的相干迭加, 为在实验上检验这种非线性效应, 必须从这种统计混合态中将它们区分出来。为此本人采用由 Yuen 等人^[7]提出的零拍检测方案来讨论它们的干涉条纹。我们用零拍检测器探测某一偏振方向上的输出流, 为此考虑测量算子

$$\hat{x} = a_1 e^{i\theta} + a_1^\dagger e^{-i\theta}, \quad \hat{y} = a_2 e^{i\theta} + a_2^\dagger e^{-i\theta}. \quad (17)$$

式中相角 θ 由实验者调节本地振荡信号相位来决定, 利用量子力学标准的方法, 建立 (x, y) 表象函数

$$\begin{aligned} \langle x, y | \text{out}, \frac{\pi}{2\Omega} \rangle = & \frac{1}{2} \left\{ \langle y | i\beta \rangle_{a_1} \langle x | i\alpha \rangle_{a_1} + \langle y | -i\beta \rangle_{a_1} \langle x | -i\alpha \rangle_{a_1} \right. \\ & \left. + \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left[\langle y | \alpha \rangle_{a_1} \langle x | \beta \rangle_{a_1} - \langle y | -\alpha \rangle_{a_1} \langle x | -\beta \rangle_{a_1} \right] \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

(18)式中 $\langle x | \delta \rangle$ 是相干态在 x 表象中的表示函数

$$\langle x | \delta \rangle = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2} x \delta e^{i\theta} - \frac{1}{2} \delta^2 e^{2i\theta} - \frac{1}{2} |\delta|^2 \right]. \quad (19)$$

(1) 如果初态是线偏振光, 即 $\beta = 0$, 令 $\alpha = |\alpha| e^{i\phi}$, (18)式变为

$$\begin{aligned} \langle x, y | \text{out}, \frac{\pi}{2\Omega} \rangle_{\text{line}} = & \frac{1}{2} \left\{ \langle y | 0 \rangle_{a_1} \left(\langle x | i\alpha \rangle_{a_1} + \langle x | -i\alpha \rangle_{a_1} \right) \right. \\ & \left. + \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \left[\langle y | \alpha \rangle_{a_1} - \langle y | -\alpha \rangle_{a_1} \right] \langle x | 0 \rangle_{a_1} \right\}, \quad (20) \end{aligned}$$

(20)式可看成宏观上可区分的两个部分的相干迭加,第一部分是所有光子沿偏振光模 a_1 方向离开双折射介质,第二部分是所有光子沿偏振光模 a_2 离开介质,这里我们看到:初态只在偏振光模 a_2 方向有光子,而未态在两个偏振光模方向均有光子,这是一种非线性效应,这两部分相干迭加将产生干涉条纹。现在我们来考虑偏振光模 a_1 方向输出流的几率分布函数 $P_I(x)$,显然它与 y 变量无关,故 $P_I(x)$ 为

$$P_I(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy \left| \langle x, y | \text{out}, \frac{\pi}{2\Omega} \rangle_{\text{line}} \right|^2, \quad (21)$$

由(19)、(20)式经过繁复的数学运算得到

$$\begin{aligned} P_I(x) = & \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ (1 - e^{-2|\alpha|^2}) e^{-x^2} + \frac{1}{2} \exp[-(x + \sqrt{2}|\alpha|\sin(\theta + \phi))^2] \right. \\ & + \frac{1}{2} \exp(-[x - \sqrt{2}|\alpha|\sin(\theta + \phi)]) \\ & \left. + \exp[-x^2 - 2|\alpha|^2 \sin^2(\theta + \phi)] \cos[2\sqrt{2}x|\alpha|\cos(\theta + \phi)] \right\}, \quad (22) \end{aligned}$$

(22)式中第一项代表真空涨落贡献;第二、三项代表相干态的贡献,最后一项是两部分相干产生的干涉条纹,(22)式几率分布与 Mecozzi^[3] 利用高斯积分方法得到几率分布一致。如果调节本地振荡信号相位使之相角 θ 满足 $\cos(\theta + \phi) = 1$,此时干涉条纹最明显

$$P_I(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ (1 - e^{-2|\alpha|^2}) e^{-x^2} + e^{-x^2} [1 + \cos(2\sqrt{2}x|\alpha|)] \right\}. \quad (23)$$

(2) 如果初态是圆偏振相干光即 $\beta = -i\alpha$,令 $\alpha = |\alpha| \exp(i\phi)$,这样(18)式变为

$$\begin{aligned} \left\langle x, y | \text{out}, \frac{\pi}{2\Omega} \right\rangle_c = & \frac{1}{2} \left\{ \langle y | \alpha \rangle_{a_1} \langle x | i\alpha \rangle_{a_1} + \langle y | -\alpha \rangle_{a_1} \langle x | -i\alpha \rangle_{a_1} \right. \\ & \left. + \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) [\langle y | \alpha \rangle_{a_1} \langle x | -i\alpha \rangle_{a_1} - \langle y | -\alpha \rangle_{a_1} \langle x | i\alpha \rangle_{a_1}] \right\}, \quad (24) \end{aligned}$$

同理,经过繁复的数学运算求得偏振光模 a_1 方向输出流的几率分布为

$$P_c(x) = \frac{1}{2} [P_+(x; \alpha) + P_-(x; \alpha) + Q(x; \alpha) + R(x; \alpha)], \quad (25)$$

$$\left. \begin{aligned} P_{\pm}(x; \alpha) &= |\langle x | \pm i\alpha \rangle|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\{-[x \pm \sqrt{2}|\alpha|\sin(\theta + \phi)]^2\}, \\ Q(x; \alpha) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp[-x^2 - 2|\alpha|^2 \sin^2(\theta + \phi)] \cos[2\sqrt{2}x|\alpha|\cos(\theta + \phi)], \\ R(x; \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-2|\alpha|^2} [P_-(x; \alpha) - P_+(x; \alpha)], \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

如果调节本地振荡信号相位使之相角满足 $\cos(\theta + \phi) = 1$,这样它们的干涉条纹最明显

$$P_c(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \{ e^{-x^2} [1 + \sqrt{2} \cos(2\sqrt{2}x|\alpha|)] \}. \quad (27)$$

根据(22)式进行了数值计算并作图表示,如图1所示。图1显示了 $|\alpha| = 5$, $\cos(\theta + \phi) = 1$, $\cos(\theta + \phi) = 0.5$ 两种几率分布 $P_I(x)$ 。从图1中可见,当调节相角 θ 满足 $\cos(\theta + \phi) = 1$ 时,其干涉条纹十分明显。对(25)式也曾作了数值计算,发现当 $\cos(\theta + \phi) = 1$ 时它的几率分布图与线偏振的 $P_I(x)$ 相似,这一点从(23)、(27)式中也可见。

必须指出,当 $K \neq 0$ 时, (15) 式等表达式是很复杂的, 但对于时间 $t = (\pi/2^n \Omega)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 它们仍可表达为有限个宏观上可分辨量子态的相干迭加^[3]。上述研究表明, 相干光进入非线性双折射介质后, 将产生宏观上可分辨的量子迭加态。可是任何微小的损耗和衰减都会破坏这种量子态^[1], 这就对实验和测量技术提出了很高的精度要求。Mecozzi^[3] 等人从理论上提出了用压缩真空技术来增强干涉条纹, 以便能观测到这种宏观上可分辨的量子态, 可是至今没有实验上成功的报道, 人们正在从理论和实验上进行更深入的研究。

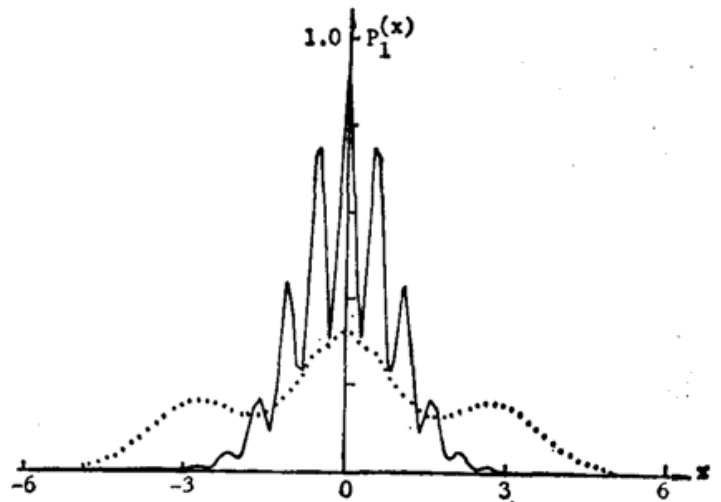


Fig.1 The probability density $P_1(x)$ is shown for $\beta=0$ and $|\alpha|=5$. The solid line is for $\cos(\theta+\phi)=1$ and the dashed line for $\cos(\theta+\phi)=0.5$

参 考 文 献

- [1] G. T. Milburn, G. A. Holmes; *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **56**, No.22 (Jun), 2237~2240.
- [2] B. Yurke, D. Stoler; *Phys. Rev. Lett.*, 1986, **57**, No. 1 (Jul), 13~16.
- [3] A. Mecozzi, P. Tombesi; *Phys. Rev. Lett.*, 1987, **58**, No. 11 (Mar), 1055~1058.
- [4] B. Yurke; *Phys. Rev(A)*, 1985, **A32**, No.1 (Jul), 300~310.
- [5] N. Imoto *et al.*; *Phys. Rev. (A)*, 1985, **A32**, No.4 (Oct), 2287~2292.
- [6] J. Perina; *«Quantum Statistics of Linear and Nonlinear Optical Phenomena»*, (Reidel, Boston, Mass., 1983).
- [7] H. P. Yuen, J. H. Shapiro; *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1980, **IT-26**, No. 1 (Jan), 78~93.

Generation and detection of macroscopically distinguishable quantum states

ZHU BENGYUAN

(Physics Division, Chinese Institute of Metrology, Hangzhou)

WANG ZONGCHI

(Department of Physics, Fujian Province Sanming Teachers' College)

(Received 18 December 1988; revised 25 September 1989)

Abstract

An exact solution for the nonlinear birefringent medium model is obtained by using $SO(3)$ rotation group property. It is proved that coherent light entering the medium will evolve into a superposition of macroscopically distinguishable quantum states. In order to detect their interference fringes, homodyne detection scheme is used and the probability distribution for the output of homodyne detector is calculated when the initial states being linear and circular polarization coherent light.

Key words: macroscopically distinguishable quantum states; birefringent medium; homodyne detection.