

# 原子的共振激发——速率方程与半经典理论的比较

蒋孟衡 林福成

(中国科学院上海光学精密机械研究所, 上海 201800)

## 提 要

本文由半经典理论推得了原子电离率随脉冲空间传输出现周期性起伏这一新的相干作用结果, 这点与速率方程的预计相差甚远。文中定量说明了利用速率方程对同位素分离过程进行分析时产生的系统误差, 为实验分析工作提供了依据。

关键词: 平均电离率、能量利用率。

## 一、引 言

原子与光场的作用是激光物理的基本课题之一, 理论描述需同时考虑光场对原子的激发以及原子对光场的影响。在实验工程技术等应用领域, 涉及这一问题时多采用唯象性的速率方程与光子数方程结合考虑(简称速率方程)<sup>[1]</sup>, 而在基础物理研究中多采用半经典的布洛赫-麦克斯韦(Bloch-Maxwell)方程组<sup>[2]</sup>。半经典理论形式复杂处理较困难, 但给出的结果与真实值最为接近。速率方程在连续光激发条件下与半经典理论趋于一致。本文研究在共振脉冲场作用下, 速率方程是否仍然适用以及它所给出的结果与半经典理论之差别等。

## 二、理论描述及方程

理论描述的原子为二能级系统, 能级 $|1\rangle$ 、 $|2\rangle$ 能量差为 $\hbar\omega_0$ , 上能级 $|2\rangle$ 存在着到连续态的电离速率 $F$ 及到下能级 $|1\rangle$ 的自发弛豫 $A$ , 如图1所示。脉冲光场采用经典处理, 视作在中心载频 $\omega$ 上叠加一个脉冲包络 $\varepsilon(z, t)$ , 考虑到脉冲激光都为高斯线型, 则光场可写作

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \mathbf{e} \varepsilon(z, t) \exp[i(kz - \omega t - \phi)] + c.c., \\ \varepsilon(z, t) &= \varepsilon_0(z, t) \exp[-(t-t_0)^2 / (\tau_p/2)^2], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{e}$ 为光场偏振单位方向矢量,  $t_0$ 为脉冲峰值位置,  $\tau_p$ 为线型宽度,  $\phi$ 为光场位相。定义相应脉冲面积 $\theta$ 为

$$\theta = \frac{\mu}{\hbar} \int \varepsilon(z, t) dt, \quad (2)$$

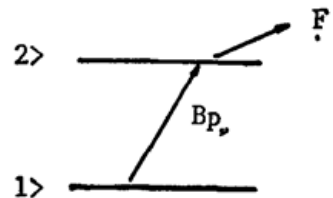


Fig. 1 Model of a two-level atom

式中  $\mu$  为相应原子跃迁偶极矩。在此基础上可以给出两种理论的方程形式。

### 1. 速率方程与光子数方程

唯象性速率方程由爱因斯坦系数  $A$ 、 $B$  与光能密度  $\rho_\nu$  给出, 而光子数方程来源于能量守恒。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial t} &= B\rho_\nu g(\nu) \cdot (N_2 - N_1) + AN_2, \\ \frac{\partial N_2}{\partial t} &= -B\rho_\nu g(\nu) \cdot (N_2 - N_1) + (A + F)N_2, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\frac{\partial n_p}{\partial z} + \left(\frac{n}{c}\right) \frac{\partial n_p}{\partial t} = -\frac{B\rho_\nu g(\nu) \cdot (N_2 - N_1) + AN_2}{c}, \quad (4)$$

$$\rho(\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{A + F}{(\Delta\omega)^2 + [(A + F)^2/4]}, \quad (5)$$

式中  $g(\nu)$  为归一化跃迁线型函数,  $\Delta\omega = \omega_0 - \omega$  为原子与光场频率失谐。  $N_2 \cdot N_1$  分别为上、下能级粒子数,  $n_p$  为单位体积内光子数密度, 考虑到光能密度  $\rho_\nu$  与光场振幅间的关系

$$\rho_\nu = \hbar\omega n_p = \frac{1}{8\pi} |\varepsilon|^2. \quad (6)$$

因此方程(4)可化为

$$\frac{\partial \rho_\nu}{\partial z} + \left(\frac{n}{c}\right) \frac{\partial \rho_\nu}{\partial t} = -\frac{\hbar\omega}{c} [B\rho_\nu g(\nu) \cdot (N_2 - N_1) + AN_2]. \quad (7)$$

方程(3)和(7)构成一组封闭方程, 当给定光脉冲初始条件下即可研究原子的受激行为。

### 2. 半经典理论的布洛赫-麦克斯韦方程组

半经典方程已有较多文献进行了推导, 本文不再多讨论, 仅根据参考文献[2]、[3]给出形式如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta\omega v - \frac{u}{T_2'}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\Delta\omega u - \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon w - \frac{v}{T_2'}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{\mu}{\hbar} \varepsilon \cdot v - (x + w) \frac{1}{T_3}, \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= -\frac{(x + w)F}{2}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left(\frac{n}{c}\right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{\omega c \mu_0 N \mu}{2} \langle v \rangle, \\ \left[ \frac{\partial \phi}{\partial z} + \left(\frac{n}{c}\right) \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \varepsilon &= -\frac{\omega c \mu_0 N \mu}{2} \langle u \rangle, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $u$ 、 $v$  分别为原子电偶极矢量实部与虚部,  $T_1$ 、 $T_2$  分别为原子纵向、横向弛豫时间,  $\varepsilon$ 、 $\phi$  为光场振幅及位相;  $N$  为单位体积内原子数密度,  $x$  为上、下能级总布居数,  $w$  为上、下能级布居数差, 它们与速率方程中  $N_1$ 、 $N_2$  关系为

$$\left. \begin{aligned} xN &= N_2 + N_1, \\ wN &= N_2 - N_1. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

### 三、数值计算结果及比较

为检验两种理论对于实验描述的相对准确性,作者选择了一组比较典型的样品参数,分别用两种方法进行了数值计算,并对结果进行了比较。

选定样品为 Na 原子蒸汽,密度  $N = 1.1 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$ , 跃迁下能级为基态  $3S_{1/2}$ , 上能级为  $3P_{1/2}$ , 跃迁波长  $\lambda = 5896 \text{ \AA}$ , 跃迁偶极矩  $\mu = 1.5 \times 10^{-29} \text{ eB}$ 。另外,取定上能级电离速率  $F = 2 \times 10^8 / \text{s}$ , 脉冲宽度为  $10 \text{ ns}$ , 则由(1)、(2)式得到脉冲峰值处电场强度  $E_0$  与脉冲面积  $\theta$  的关系

$$E_0 = \frac{2\hbar\theta}{\sqrt{\pi\mu\tau_p}} \quad (10)$$

由量子力学中关系式<sup>[4]</sup>, 得到

$$A = \frac{4\omega^3\mu^2}{3\hbar c^3} = 6.21 \times 10^7 \text{ s}^{-1} \quad (11)$$

对于速率方程(3)式和(7)式与半经典方程组(8)式,一般没有解析解,必须借助于数值分析法,为此编制了相应的计算机计算程序。

首先取定输入脉冲面积为  $9\pi$ , 考察了传输中空间各点上电离率、脉冲面积、光场总能量等的变化情况。图 2、图 3 分别为速率方程与半经典理论的结果。从图 2 可以看到,速率方程的计算表明,随着脉冲在介质中传输,脉冲总能量不断降低,相应原子电离率随之单调下降,脉冲面积也随能量均匀地同步衰减。与此相比较,图 3 中半经典理论给出的结果却复杂得多,虽然脉冲能量衰减相对仍比较平滑,空间各点上原子的电离率和脉冲面积的衰减方式却与速率方程的结果截然不同,脉冲面积并不随能量降低而同步下降,而是在大部分位置处保持  $2n\pi$  不变,仅在一些特定点附近陡然损失掉  $2\pi$ 。同时,原子电离率随空间出现周期性起伏振荡行为,在各个脉冲面积突变位置处达到极大。显然,这是一种迄今尚未见到有关文献报道的新的相干作用现象,它的出现,对于激光同位素分离等工作中样品源的利用将产生不容忽视的影响。对于这一现象的物理机制,将专文予以讨论。这里值得注意的是,速率方

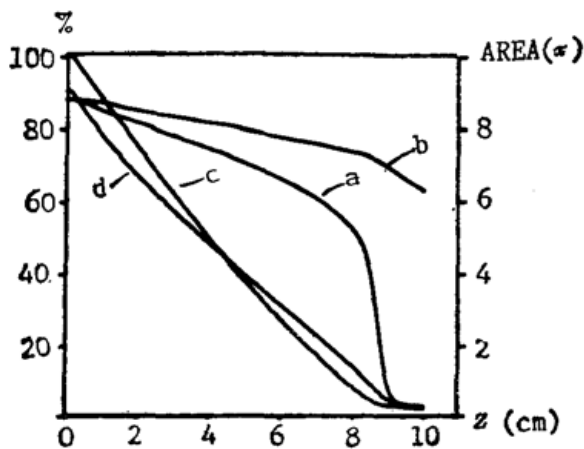


Fig. 2 Solutions of the rate equations  
 a—Spatial evolution of atom is ionization rate;  
 b—average ionization rate; c—pulse energy;  
 d—pulse area

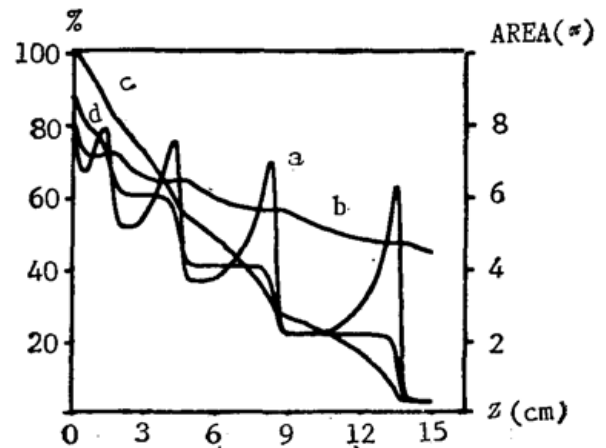


Fig. 3 Solutions of the semiclassical theory, where a, b, c, d are the same as these in Fig. 2

程表明在此介质中, 脉冲能量耗尽前可传输 9 cm 左右, 半经典理论则显示传输长度可达 14 cm, 可见, 速率方程给出的原子电离率偏高(平均偏高 50% 左右)。当计入都普勒加宽时这一差别就更为明显(见后)。

图 4、图 5 分别给出了相应一些空间位置处两种理论得到的脉冲线型演化曲线。可以看出, 速率方程结果脉冲线型主要以强度衰减为主, 得不出脉冲线型分裂等结论。半经典理论由于计及了密度矩阵非对角元项, 可以考虑相干作用过程, 结果清楚显示出了  $2\pi$  孤立峰形成。脉冲分裂, 压缩等相干光学现象, 这些结论已为实验所证实<sup>[2]</sup>。

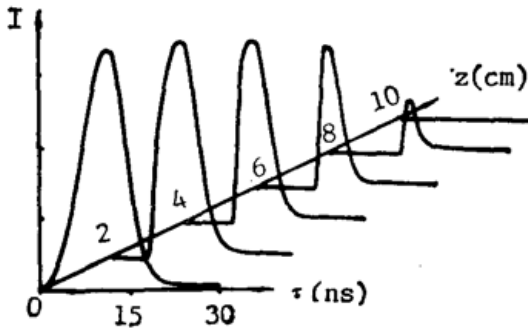


Fig. 4 Pulse profiles derived from the rate equations

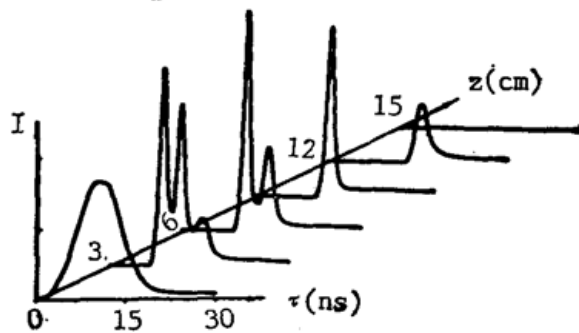
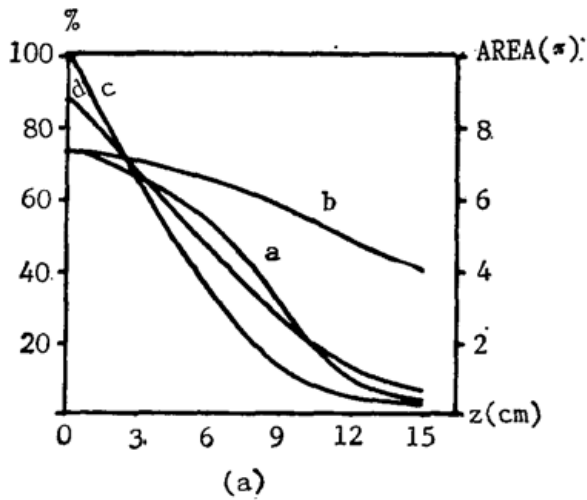
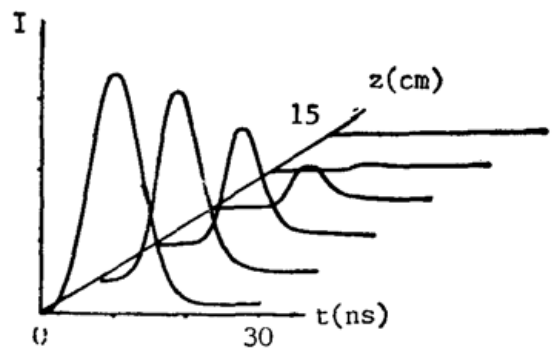


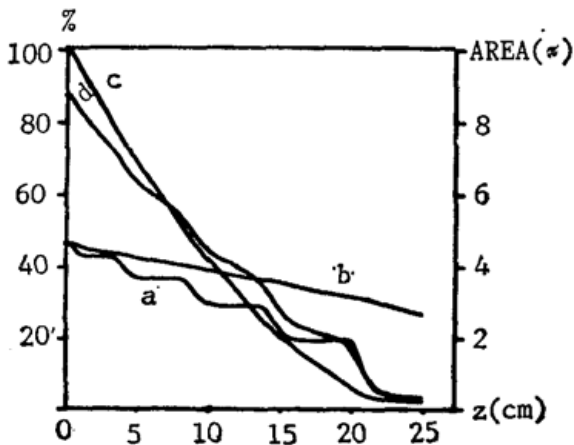
Fig. 5 Pulse profiles derived from the semiclassical theory



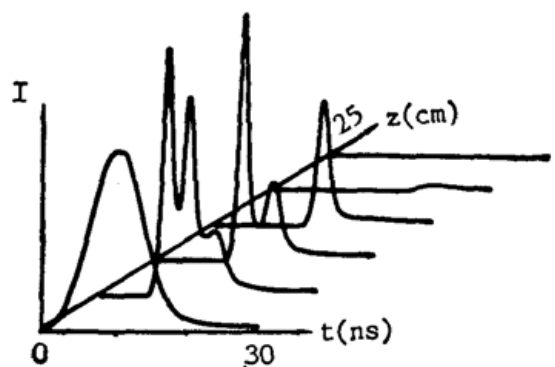
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 6 Solutions of the rate equations (a), (b) and the semiclassical theory (c) for doppler width  $\Delta\nu_0=1$  GHz where (a), (b), (c), (d) are the same as those in Fig. 2

当考虑原子运动引起的都普勒展宽时, 速率方程与半经典理论均须引入都普勒线型函数

$$g_0(\Delta\nu) = \exp\left[-\frac{\Delta\nu^2}{\nu_0^2}\right], \quad (12)$$

式中  $\nu_0$  为都普勒线宽。取  $\nu_0 = 1\text{GHz}$ , (相应原子温度约为  $200^\circ\text{C}$ ), 其余参数同前, 得到相应结果如图 6。显然, 此时两种理论差别甚大, 初始电离率相差几乎达一倍, 脉冲最大传输深度一为  $15\text{cm}$ , 一为  $22\text{cm}$ , 说明电离率平均相差也在  $50\%$  左右。这样的结果表明, 速率方程不适合于分析非均匀加宽亦即原子运动对系统的影响, 在必须计及都普勒效应情况下, 有必要采用半经典理论。

在同位素分离等实际领域, 经常的情况是样品长度一定, 需考虑不同强度光脉冲的影响。在此取定样品池长度  $L = 2\text{cm}$ , 其余参数同前, 研究样品平均电离率及光能利用率随输入光场的变化, 其计算结果如图 7 所示。

速率方程的结果表明, 随着输入脉冲面积增大, 平均电离率增高, 但能量利用率却急剧下降, 电离率增高趋势比之能量利用率下降趋势要缓慢得多。半经典理论的结果就总体趋势而言证实了上面结论, 但数值上却有较大差别, 其平均电离率并非随脉冲面积的增加而单调上升, 而是表现出了近周期起伏行为, 同时能量利用率也不是光滑下降, 而在某些位置(对应输入面积值)出现了凸起。总的说来, 速率方程给出的平均电离率和能量利用率都高于半经典理论。在能量利用率高于  $50\%$  时, 两种理论相差在  $10\% \sim 20\%$  之间, 随能量利用率降低(即输入脉冲面积值增大), 其差值略有减小。

## 四、结 论

本文对描述二能级原子与光脉冲作用的两种理论模式——速率方程和布洛赫-麦克斯韦方程——进行了数值求解, 在典型实验参数情况下比较了它们的结果, 从而得知, 速率方程给出的原子电离率与光能利用率均较半经典理论偏高, 空间各点上对应值相差平均在  $50\%$  左右, 同时, 从半经典理论得出了原子电离率随脉冲空间传输距离出现周期性起伏振荡的结果, 这些结论可供实际工作时参考。同时, 本文工作为理论计算对实验预测的准确性提供了判断系统误差的依据。

## 参 考 文 献

- [1] 林福成;《光学学报》, 1982, 2, No. 6 (Nov), 481.
- [2] R. E. Slushev, H. M. Gibbs; *Phys. Rev. (A)*, 1972, A5, No. 4 (Apr), 1634.
- [3] 亚里夫;《量子电子学》, (上海科学技术出版社, 1983), 401.
- [4] 曾谨言;《量子力学》, (科学出版社, 北京, 1984), 399.

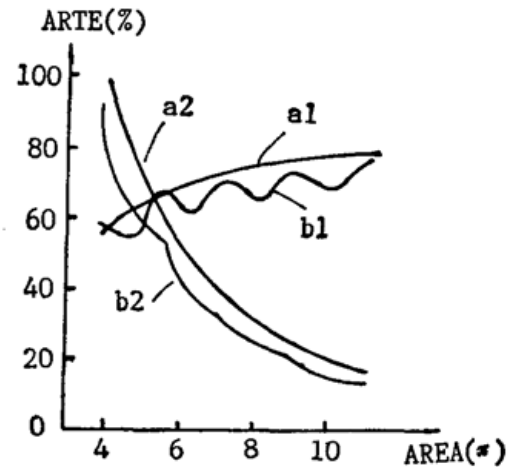


Fig. 7 Variations of the average ionization rate (a1, b1) and the coefficient of energy utilisation (a2, b2) with the different input pulse areas a1, a2—Solutions of the rate equations. b1, b2—Solutions of the semiclassical theory

## Resonant excitation of two-level atoms—Comparison between the rate equations and the semiclassical theory

JIANG MENGHENG AND LIN FUCHENG

(*Shanghai Institute of Optics and Fine Mechanics, Academia Sinica*)

(Received 24 May 1990; revised 2 July 1990)

### Abstract

Numerical techniques are used to solve and compare the rate equations with the semiclassical equations. From the semiclassical theory, it has been derived that the atomic ionizations vary oscill-attorilly with the pulse propagation distance, which is a new coherent optical phenomenon and far from the prediction of the rate equations. This work explains quantitatively the theoretical errors which come from the rate equations for the laser isotope separation, and forms the basis for the experimental analysis.

**Key words:** average ionization rate, coefficient of energy utilisotion.