

# 非圆柱形发散梯度折射率棒透镜光线传播轨迹的解析解族

廖廷佛 邱锦辉 林金豆

(福建师范大学 激光研究所, 福州)

## 提 要

本文研究光线在具有非圆柱形等折射率面的发散型梯度折射率棒透镜中的传播规律, 提出在轴向弱非匀条件(即  $dg^{-1}(z)/dz \ll 1$ ) 下近轴子午光线轨迹的一种解析表达式。从该解析式的解析解, 棒透镜梯度参数  $g(z)$  所满足的条件出发, 导出棒透镜的折射率分布族。文中给出了两个线性无关的光线传播轨迹的解析解族, 并以一种发散型棒透镜为例讨论了近轴成像特性。

关键词: 梯度折射率; 棒透镜; 光线传播。

## 一、引 言

自从第一个发散型棒透镜在日本问世后<sup>[1]</sup>, 已有若干文献对柱形、锥形和抛物型等发散梯度折射率透镜的成像特性进行了探讨<sup>[2~4]</sup>。本文研究光线在非圆柱形发散型梯度折射率棒透镜的传播规律。提出在轴向弱非匀条件下非圆柱形发散型棒透镜的近轴子午光线轨迹的一种解析表达式。从该解析式的解析解、梯度参数所满足的条件出发, 导出棒透镜的折射率分布族。文中给出了两个线性无关的光线传播轨迹的解析解族, 并以一种抛物型发散棒透镜为例, 讨论了近轴成像特性。

## 二、发散棒透镜的光线方程及其解

设发散型梯度折射率棒透镜在直角坐标系中, 其折射率为<sup>[4]</sup>

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 + g^2(z)(x^2 + y^2)], \quad (1)$$

式中  $n_0$  为棒透镜轴中心处的折射率,  $g(z)$  为其沿光线传播方向  $z$  轴的梯度参数。折射率沿径向按抛物线型递增。由(1)式得等折射率面方程是旋转曲面族方程为

$$g^2(z)(x^2 + y^2) = \text{constant}。 \quad (2)$$

在近轴光线条件下, 计及(1)式和棒透镜折射率轴向缓变条件  $(\partial n / \partial z) = 0$ , 从光线微分方程可得近轴子午光线方程<sup>[5]</sup>

$$\ddot{H}(z) - g^2(z)H(z) = 0, \quad (3)$$

式中  $H(z) = x(z)$  或  $y(z)$ ,  $\ddot{H}(z) = [d^2H(z)/dz^2]$ 。(3)式的两个线性无关持解  $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$  满足如下初始条件

$$\left. \begin{aligned} H_1(0) &= 0, \quad \dot{H}_1(0) = 1, \\ H_2(0) &= 1, \quad \dot{H}_2(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

且  $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$  满足如下恒等

$$\dot{H}_1(z)H_2(z) - H_1(z)\dot{H}_2(z) = 1, \quad (5)$$

即 Wronskian=1。对于多数的发散型梯度折射率棒透镜, 光线方程(3)只能用数值方法求解; 然而对某些特定折射率分布的棒透镜, 它可以具有解析解。

对轴向弱非匀棒透镜,  $g(z)$  在一个波长范围内变化甚小, 即有

$$\frac{d}{dz} [g^{-1}(z)] = \frac{|\dot{g}(z)|}{g^2(z)} \ll 1. \quad (6)$$

在满足条件(6)情况下, 具有非圆柱形等折射率面的发散型梯度折射率棒透镜的光线方程(3)的两个线性无关特解可表示为

$$H_1(z) = \frac{L}{b} \left[ \frac{g_0}{g(z)} \right]^{1/2} \text{sh} \left[ \frac{b}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz \right], \quad (7)$$

$$H_2(z) = \left[ \frac{g_0}{g(z)} \right]^{1/2} \text{ch} \left[ \frac{b}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz \right] + \frac{L}{2b} \left( \frac{g(0)}{g_0} \right) \left[ \frac{g_0}{g(z)} \right]^{1/2} \text{sh} \left[ \frac{b}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz \right], \quad (8)$$

式中  $b$  为常数,  $L$  为一几何参数。显然, 解(7)式和(8)式满足初始条件(4)和恒等式(5)。对给定  $g(z)$  的发散型棒透镜, 只有在满足条件(6)情况下, 光线在棒透镜中的传播才能由(7)式、(8)式描述, 然而, 对某些特定  $g(z)$  (或折射率分布)的棒透镜, 解(7)、(8)式则是光线方程(3)的解析解。

### 三、近轴子午光线方程的解析解

将(7)或(8)式代入(3)式得参数  $g(z)$  所满足的方程

$$\ddot{g}(z)g(z) - \frac{3}{2} [\dot{g}(z)]^2 - \frac{2a}{g_0^2 L^2} [g(z)]^2 = 0, \quad (9)$$

$$a = b^2 - g_0^2 L^2. \quad (10)$$

(9)式就是由(7)、(8)式给出的光线轨迹  $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$  是光线方程(3)的解析解的必要条件, 即, 如果梯度参数  $g(z)$  满足方程(9), 则光线在棒透镜中的传播可由(3)式的解析解(7)、(8)式来描述。方程(9)的通解为

$$g(z) = [g_0/f(z)], \quad (11)$$

$$f(z) = p(z/L)^2 + q(z/L) + 1. \quad (12)$$

显然, (11)式满足初始条件  $g(0) = g_0$ ,  $p$  为特定任意常数,  $q$  由下式给出

$$q^2 = 4(p+a). \quad (13)$$

对于给定的棒透镜  $a$ 、 $p$  一定, 由(13)式可求得常数  $q$ 。从而参数  $g(z)$  及折射率分布也随之确定。取不同  $p$  值时, 为保证  $g(z)$  为实函数, 应使  $q^2 \geq 0$ , 由(10)式及(13)式可得  $p$  的允许取值

$$b^2 \geq g_0^2 L^2 - p. \quad (14)$$

将(11)式代入(2)式得等折射率面方程

$$x^2 + y^2 = \text{constant} \cdot f^2(z). \quad (15)$$

从(15)式可知, 光线轨迹可由(7)、(8)式描述的棒透镜, 其等折射率面一般为旋转抛物面族。但当  $p=0$  时, 等折射率面为二次旋转圆锥面。

讨论若干种特殊情形

(1) 当  $p=0$ , 取  $b^2 = g_0^2 L^2 + (1/4)$ , 则由(13)式求得  $q = \pm 1$ , 代入(11)式得

$$g(z) = \frac{g_0}{1 \pm (z/L)}, \quad (16)$$

此即为圆锥形梯度折射率分布的情形<sup>[4]</sup>。

(2) 当  $p=-1$ , 取  $b^2 = g_0^2 L^2 + 1$  时, 有  $q=0$ ,

$$g(z) = \frac{g_0}{1 - (z/L)^2}, \quad (17)$$

此即为简单抛物型梯度折射率分布的特例<sup>[5]</sup>。

(3) 当  $p=1$ , 取  $b^2 = g_0^2 L^2$  时, 有  $q = \pm 2$ ,

$$g(z) = \frac{g_0}{[1 \pm (z/L)]^2}, \quad (18)$$

此即为顶点在  $z = \mp L$  处的所谓“平移”抛物型梯度折射率分布情形。

(4) 当  $p \neq 0$  时,  $f(z)$  为一般的二次抛物线, 这时  $b$  的取值除了应满足(14)式外, 还应保证梯度参数  $g(z) > 0$ 。计及(13)式, 可将(12)式的  $f(z)$  改写为

$$f(z) = p \left( \frac{z}{L} + \frac{q}{2p} \right)^2 - \frac{a}{p}. \quad (19)$$

由(19)式可知,  $f(z) > 0$  要求  $a$  与  $p$  反号。

(a) 当  $p < 0$  时, 应取  $b$  使  $a \geq 0$ , 即  $b^2 \geq g_0^2 L^2$ 。这时  $b$  的取值范围仍由(14)式给出。棒透镜的等折射率面如图 1 所示。等折射率曲线关于  $z = -(g/2p)L$  轴对称。与  $z$  轴的两个公共交点位于

$$z_{1,2} = -\frac{g}{2p} L \pm \frac{\sqrt{a}}{|p|}.$$

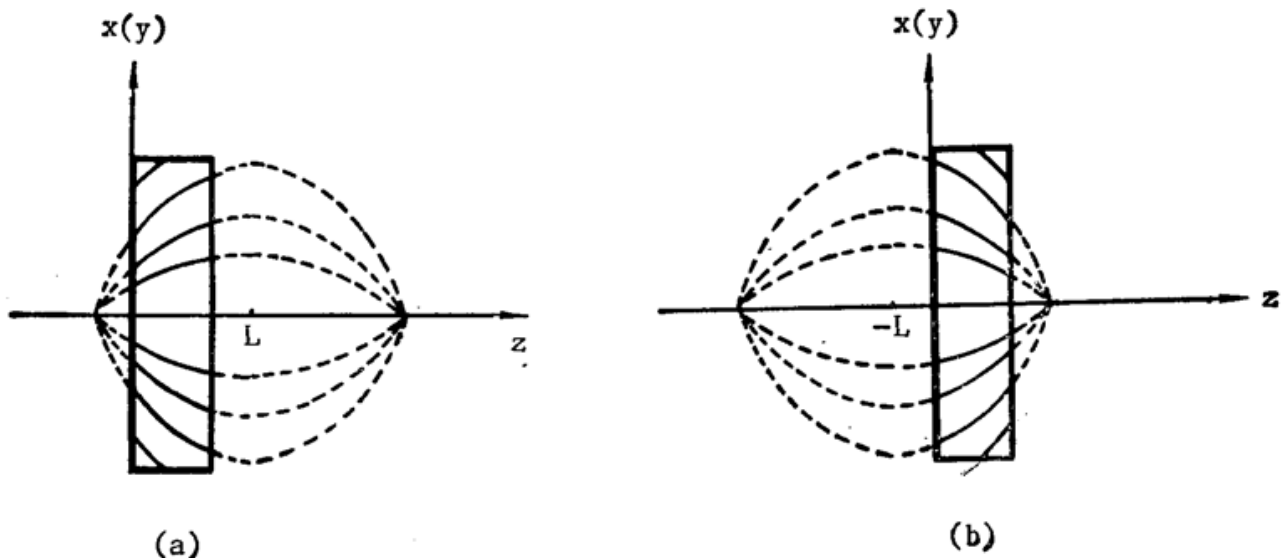


Fig. 1 Geometry of a noncylindrical GRIN rod for  $p < 0$ . Its constant-index surface is paraboloids with apexes on the straight line

$$(a) z = + \left| \frac{q}{2p} \right| L; \quad (b) z = - \left| \frac{q}{2p} \right| L$$

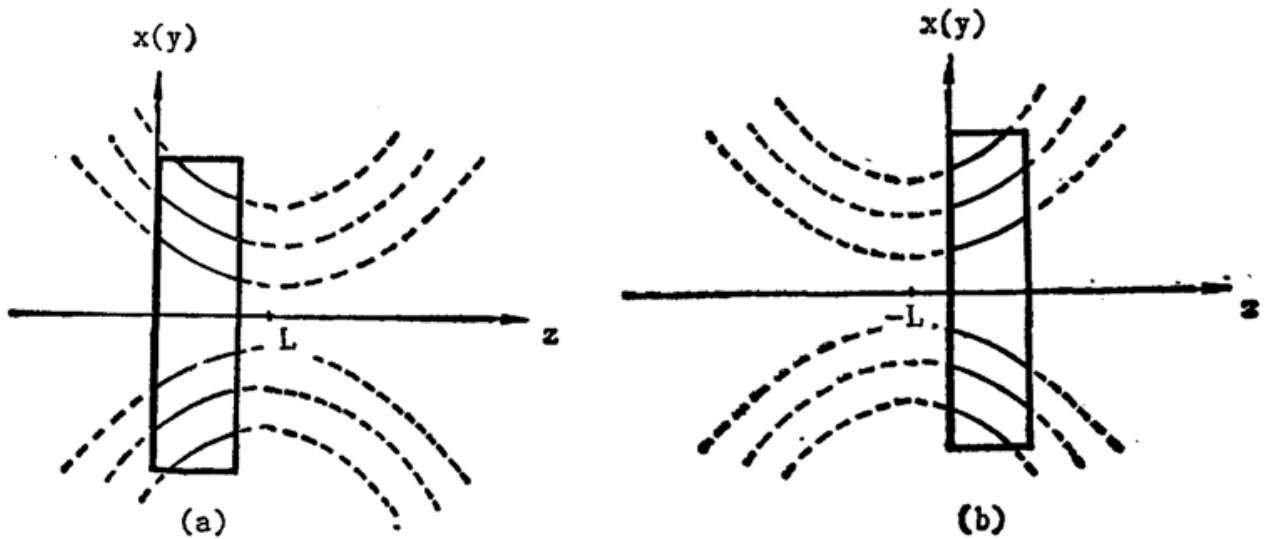


Fig. 2 Geometry of a noncylindrical GRIN rod for  $p > 0$ . Its constant-index surface is paraboloids with apexes on the straight line

$$(a) z = + \left| \frac{q}{2p} \right| L; \quad (b) z = - \left| \frac{q}{2p} \right| L$$

(b) 当  $p > 0$  时, 应取  $b$  使  $a < 0$ , 即  $b^2 \leq g_0^2 L^2$ 。计及(14)式, 则  $b$  的取值范围应为

$$g_0^2 L^2 - p \leq b^2 \leq g_0^2 L^2, \quad (20)$$

这时, 棒透镜的等折射率面如图 2 所示。

为求光线传播轨迹  $H_1(z)$ 、 $H_2(z)$ , 需计算下列积分

$$\frac{b}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz = \int_0^z \frac{b}{p \left( \frac{z}{L} \right)^2 + q \left( \frac{z}{L} \right) + 1} d \left( \frac{z}{L} \right), \quad (21a)$$

或

$$\frac{b}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz = \int_0^z \frac{b}{p \left( \frac{z}{L} + \frac{q}{2p} \right)^2 - \frac{a}{p}} d \left( \frac{z}{L} \right), \quad (p \neq 0) \quad (21b)$$

(1) 当  $p = 0$  时, 由(21a)式求得

$$\frac{b}{g_0 L_0} \int_0^z g(z) dz = \frac{b}{q} \ln \left( 1 + q \frac{z}{L} \right), \quad (p = 0, q \neq 0) \quad (22)$$

(2) 当  $p \neq 0$  时, 利用(21b)式求得

$$\frac{b}{g_0 L} \int_0^z g(z) dz = \left\{ \begin{array}{l} \frac{b}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{p}{\sqrt{-a}} \left( \frac{q}{2p} + \frac{z}{L} \right) \right] \Big|_0^z, \quad (a < 0, p > 0) \\ \frac{b}{2\sqrt{a}} \ln \frac{\left[ 1 - \frac{p}{\sqrt{a}} \left( \frac{q}{2p} + \frac{z}{L} \right) \right]}{\left[ 1 + \frac{p}{\sqrt{a}} \left( \frac{q}{2p} + \frac{z}{L} \right) \right]} \Big|_0^z, \quad (a > 0, p < 0) \\ -\frac{b}{p} \cdot \frac{1}{\left( \frac{q}{2p} + \frac{z}{L} \right)} \Big|_0^z, \quad (a = 0, p \neq 0) \end{array} \right. \quad (23)$$

(3) 当  $q = \pm 2p$  时, (23)式化为

$$\frac{b}{g_0 L} \int_0^s g(z) dz = \left\{ \begin{array}{l} \pm \frac{b}{\sqrt{-a}} \operatorname{tg}^{-1} \left[ \frac{p}{\sqrt{-a}} \left( 1 \pm \frac{z}{L} \right) \right] \Big|_0^s, \quad (a < 0, p > 0) \\ \pm \frac{b}{2\sqrt{a}} \ln \frac{\left[ 1 - \frac{p}{\sqrt{a}} \left( 1 \pm \frac{z}{L} \right) \right]}{\left[ 1 + \frac{p}{\sqrt{a}} \left( 1 \pm \frac{z}{L} \right) \right]} \Big|_0^s, \quad (a > 0, p < 0) \\ -\frac{b}{p} \frac{1}{\left( 1 \pm \frac{z}{L} \right)} \Big|_0^s, \quad (a = 0, p \neq 0) \end{array} \right. \quad (24)$$

将  $g = \pm 2p$  代入 (13) 式可求得 (24) 式中的  $p$

$$p = \frac{1}{2} [1 \pm \sqrt{1 + 4a}], \quad (25)$$

这时, 由  $(1 + 4a) \geq 0$  及 (10) 式求得  $b$  取值范围

$$b^2 \geq g_0^2 L^2 - \frac{1}{4}. \quad (26)$$

将 (22) 式, 或 (23) 式, 或 (24) 式代入 (7) 式、(8) 式即得等折射率面呈抛物线型变化的发散梯度折射率棒透镜的光线轨迹解析解族。

例如, 对  $p < 0, a > 0$  且  $g = \pm 2p$  情形, 将 (24) 式中间等式代入 (7) 式、(8) 式求得光线轨迹方程和斜率方程

$$\dot{H}_1(z) = \frac{1}{\left( pt^2 - \frac{a}{p} \right)^{1/2}} \left[ \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) + \frac{pt}{b} \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \right], \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_2(z) = & \pm \frac{1}{L \left( pt^2 - \frac{a}{p} \right)^{1/2}} \left[ \left( pt - \frac{p}{\left( p - \frac{a}{p} \right)^2} \right) \operatorname{ch}(\alpha - \alpha_0) \right. \\ & \left. + \left( b - \frac{pt^2}{b \left( p - \frac{a}{p} \right)^2} \right) \operatorname{sh}(\alpha - \alpha_0) \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\alpha = \frac{b}{2\sqrt{a}} \ln \frac{[1 - (p/\sqrt{a})t]}{[1 + (p/\sqrt{a})t]}, \quad (31)$$

$$\alpha_0 = \alpha|_{z=0}, \quad t = 1 + (z/L). \quad (32)$$

#### 四、抛物型发散棒透镜的近轴成像特性

抛物型发散棒透镜的传递矩阵为

$$T = \begin{bmatrix} H_2 & H_1/n_0 \\ n_0 \dot{H}_2 & \dot{H}_1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

设物面、像面到棒透镜入射端面 ( $z=0$ )、出射端面 ( $z=d$ ) 的距离为  $l_0$  和  $l'_0$ , 则物像关系式为<sup>[5]</sup>

$$l'_0 = \frac{n_0 l_0 H_2(z) - H_1(z)}{n_0 [\dot{H}_1(z) - n_0 l_0 \dot{H}_2(z)]}. \quad (34)$$

现举一例讨论棒透镜的近轴成像特性。已知棒透镜  $b^2 = g_0^2 L^2 + 2$ , 即  $a=2$ , 取  $p=-1$ ,

则  $g = \pm 2$ 。棒透镜的梯度参数

$$g(z) = \frac{g_0}{2 - \left(1 \pm \frac{z}{L}\right)^2}, \quad (35)$$

将  $p = -1$ ,  $a = 2$  代入 (27) ~ (32) 式得光线轨迹和斜率方程为

$$H_1(z) = \pm (2 - t^2)^{1/2} \text{sh}(\alpha - \alpha_0), \quad (36)$$

$$H_2(z) = (2 - t^2)^{1/2} \left[ \text{ch}(\alpha - \alpha_0) + \frac{1}{b} \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \right], \quad (37)$$

$$\dot{H}_1(z) = \frac{1}{(2 - t^2)^{1/2}} \left[ \text{ch}(\alpha - \alpha_0) - \frac{t}{b} \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \right], \quad (38)$$

$$\dot{H}_2(z) = \pm \frac{1}{L(2 - t^2)^{1/2}} \left[ (1 - t) \text{ch}(\alpha - \alpha_0) + \left(b - \frac{t}{b}\right) \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \right], \quad (39)$$

$$\alpha = \frac{b}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t}, \quad \alpha_0 = \alpha|_{s=0} = \frac{b}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

通过 (34) 式及 (36) ~ (39) 式即可进行物像计算。根据传递矩阵的性质, 透镜的焦距为

$$f' = -f = -\frac{1}{n_0 \dot{H}_2} = \mp \frac{L_1}{n_0} (2 - t^2)^{1/2} \left[ (1 - t) \text{ch}(\alpha - \alpha_0) + \left(b - \frac{t}{b}\right) \text{sh}(\alpha - \alpha_0) \right]^{-1}. \quad (40)$$

由 (34) 式及 (36) ~ (39) 式可求得物方、像方的主点和焦点位置为

$$l_h = \frac{\dot{H}_1 - 1}{n_0 \dot{H}_2} = \pm \frac{L}{n_0} \frac{[\text{ch}(\alpha - \alpha_0) - (t/b) \text{sh}(\alpha - \alpha_0) - (2 - t^2)^{1/2}]}{\{(1 - t) \text{ch}(\alpha - \alpha_0) + [b - (t/b)] \text{sh}(\alpha - \alpha_0)\}}, \quad (41)$$

$$l_f = \frac{\dot{H}_1}{n_0 \dot{H}_2} = \pm \frac{L}{n_0} \frac{[\text{ch}(\alpha - \alpha_0) - (t/b) \text{sh}(\alpha - \alpha_0)]}{\{(1 - t) \text{ch}(\alpha - \alpha_0) + [b - (t/b)] \text{sh}(\alpha - \alpha_0)\}}, \quad (42)$$

$$v_h = \frac{1 - \dot{H}_2}{n_0 \dot{H}_2} = \mp \frac{L}{n_0} \frac{(2 - t^2) [\text{ch}(\alpha - \alpha_0) + (1/b) \text{sh}(\alpha - \alpha_0) - (2 - t^2)^{1/2}]}{\{(1 - t) \text{ch}(\alpha - \alpha_0) + [b - (t/b)] \text{sh}(\alpha - \alpha_0)\}}, \quad (43)$$

$$v_f = -\frac{H_2}{n_0 \dot{H}_2} = \mp \frac{L}{n_0} \frac{(2 - t^2) [\text{ch}(\alpha - \alpha_0) + (1/b) \text{sh}(\alpha - \alpha_0)]}{\{(1 - t) \text{ch}(\alpha - \alpha_0) + [b - (t/b)] \text{sh}(\alpha - \alpha_0)\}}, \quad (44)$$

对给定厚度为  $d$  的棒透镜, 以上诸式中  $z = d$ ,  $t = 1 + (d/L)$ ,

$$\alpha = \frac{b}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + [1 \pm (d/L)]}{\sqrt{2} - [1 \pm (d/L)]}.$$

## 五、结 论

综上所述, 本文导出了光线方程 (3) 的解可表示为 (7)、(8) 式给出的  $H_1$ 、 $H_2$  形式的解析解, 发散棒透镜的梯度参数所满足的条件 (9), 并由此推得相应棒透镜的折射率分布族。对于其它折射率分布的发散棒透镜, 只要  $g(z)$  满足弱非匀条件 (6), 光线传播也可由 (7)、(8) 式描述。而文献 [4~5] 是本文的特例。本文导出的折射率分布除了  $p = 0$  时代表等折射率面为圆锥面的发散棒透镜外, 其余的均代表抛物线型等折射率面的发散梯度折射率棒透镜。因此, (7)、(8) 式及 (23) 式代表了等折射率面呈一般抛物线型变化的发散梯度折射率棒透镜的光线轨迹解析解族。本文的结果对作为“负透镜”用的非圆柱形发散棒透镜的成像研究及元件设计是有一定意义的。

## 参 考 文 献

- [1] Y. Ohtsuka *et al.*; *Appl. Opt.*, 1981, **20**, No. 20 (Oct), 3562~3565.  
[2] 殷宗敏;《激光》, 1982, **9**, No. 2 (Feb), 65~68,  
[3] A. Rohra; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 19 (Sep), 3058~3063.  
[4] 廖廷倮;《中国激光》, 1989, **16**, No. 5 (May), 267~271。  
[5] 廖廷倮等;《中国激光》待发表。

## A set of analytical solutions of the paraxial ray equation for noncylindrical defocusing GRIN lens

LIAO TIUGDI, QIU JINHUI AND LIN JINDOU

(*Institute of Lasers, Fujian Normal University, Fuzhou*)

(Received 7 March 1989; revised 17 May 1989)

### Abstract

In this paper, a study of the ray propagating through noncylindrical defocusing GRIN lens is presented. A set of general solutions of the paraxial meridial ray equation for noncylindrical defocusing GRIN lens which meet the weakly inhomogeneous condition (ie,  $\frac{d}{dz} [g^{-1}(z)] \ll 1$ ) is proposed. The refractive-index profiles are derived from the condition met by the gradient parameter- $g(z)$ , which provides the analytical solutions of the ray equation. Two independent analytical solutions for ray propagating paths are given and the paraxial imaging characteristics are discussed for a parabolic defocusing GRIN lens.

**Key words:** gradient index; GRIN lens; ray propagation.