

球面端面的锥形梯度折射率透镜的 近轴成像特性

廖延伟

邹义榕

(福建师范大学激光研究所)

(南平师专物理系)

提 要

本文根据光线在球面上的折射公式及光线微分方程,研究了光线经两端面为球面的锥形梯度折射率透镜的传播和变换,基于光线传递 $ABCD$ 矩阵,提出了球面端面的锥形梯度折射率透镜的一种等效光学系统。文中给出了该透镜的主平面、焦平面和焦距计算公式,以及近轴成像高斯公式。当锥度为零时即得到球面端面的柱形或径向梯度折射率透镜的相应结果。

关键词: 梯度折射率,自然焦透镜,光学成像。

一、引 言

梯度折射率透镜的成像性能及应用的开拓是当今梯度折射率光学的主要研究方向。近年来,在研究像差理论的基础上出现了不少采用梯度折射率棒材料的光学设计例子。且已有若干在实际中获得了成功应用的实例,如直印机排镜头,光盘拾光物镜,内窥镜及激光——光纤耦合物镜等^[1~4]。在这些梯度折射率光学系统的设计中,为更好地校正和平衡系统的像差,并在满足同样光焦度要求下使系统的结构更为紧凑,往往要把梯度折射率棒的端面设计为球面。新近,一种等折射率面为圆锥面的锥形梯度折射率透镜,由于其孔径和视场可变的独特优点而逐渐引起人们的兴趣^[5~8]。这种透镜可望在网格高速投影机^[9]及其它需要大数值孔径物镜的场合中获得应用。本文利用光线在球面上的折射公式及光线方程,研究端面为球面的锥形梯度折射率透镜的近轴成像特性。基于传递矩阵特征,提出了透镜的一种等效光学系统;并给出了透镜的高斯光学公式,在锥度为零下,公式作适当变换后也可用于柱形梯度折射率透镜。

二、透镜的传递矩阵及等效系统

考虑一锥形梯度折射率透镜,其入射端面 and 出射端面均为球面,曲率半径分别为 R_1 和 R_2 ,且锥形棒大、小端的口径分别为 $2r_1$ 和 $2r_2$ ($r_1 > r_2$) 大端面位于 z 轴上的 $z=0$ 处,小端面位于 $z=d$ 处,如图 1 所示。锥形梯度折射率透镜的折射率分布为

收稿日期: 1988年9月10日; 收到修改稿日期: 1989年1月4日

$$n^2(x, y, z) = n_0^2 [1 - g^2(z)(x^2 + y^2)], \quad (1)$$

式中 n_0 为梯度折射率棒轴中心 ($x=y=0$) 处的折射率, $g(z)$ 为沿 z 轴的梯度参数

$$g(z) = \frac{g_0}{1 - (z/L)} = \frac{g_0}{t(z)}, \quad (2)$$

其中 $g_0 = g(0)$, $t(z) = [1 - (z/L)]$ 。 L 为大端面到锥顶点间的距离。

设有一近轴光线, 以一倾角 θ_0 入射在大端球面上离 z 轴垂直距离 r_0 处, 经该球面折射后在梯度折射率棒中传播, 到达小端时又经球面折射进入像空间。在近轴近似下, 光线在梯度折射率棒中的传播满足光线方程

$$\ddot{H}(z) + g^2(z)H(z) = 0, \quad (3)$$

式中 $H(z) = x(z)$ 或 $y(z)$, $\dot{H}(z) = [d^2H(z)/dz^2]$ 。如果忽略球面上入射点的有限矢高 (与棒长度 d 相比是小量)。由球面折射公式可得光线方程 (3) 的初始条件

$$\left. \begin{aligned} H(0) &= r_0, \\ \dot{H}(0) &= \frac{n_0 - 1}{n_0 R} r_0 + \frac{1}{n_0} \theta_{00} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

方程 (3) 的通解为

$$\left. \begin{aligned} H(z) &= A_1 \sqrt{t(z)} \cos[b \ln t(z)] + A_2 \sqrt{t(z)} \sin[b \ln t(z)], \\ b^2 &= g_0^2 L^2 - \frac{1}{4}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中 A_1 、 A_2 为常数。将 (4) 式初始条件代入 (5) 式得轨迹方程

$$\begin{aligned} H(z) &= r_0 \sqrt{t(z)} \left\{ \cos[b \ln t(z)] - \frac{1}{2b} \sin[b \ln t(z)] \right\} \\ &+ r_0 \frac{n_0 - 1}{n_0 R} \cdot \frac{1}{b} \sqrt{t(z)} \sin[b \ln t(z)] - \theta_0 \frac{L}{n_0 b} \sqrt{t(z)} \sin[b \ln t(z)], \end{aligned} \quad (6)$$

和斜率方程

$$\begin{aligned} \dot{H}(z) &= r_0 \frac{g_0^2 L}{b \sqrt{t(z)}} \sin[b \ln t(z)] \\ &- r_0 \frac{n_0 - 1}{n_0 R} \frac{1}{\sqrt{t(z)}} \left\{ \cos[b \ln t(z)] + \frac{1}{2b} \sin[b \ln t(z)] \right\} \\ &+ \theta_0 \frac{1}{n_0 \sqrt{t(z)}} \left\{ \cos[b \ln t(z)] + \frac{1}{2b} \sin[b \ln t(z)] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

将 (6)、(7) 式表示成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} H(z) \\ n_0 \dot{H}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2(z) & H_1(z)/n_0 \\ n_0 H_2(z) & \dot{H}_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

式中矩阵元 $H_1(z)$ 、 $\dot{H}_1(z)$ 及 $H_2(z)$ 、 $\dot{H}_2(z)$ 为

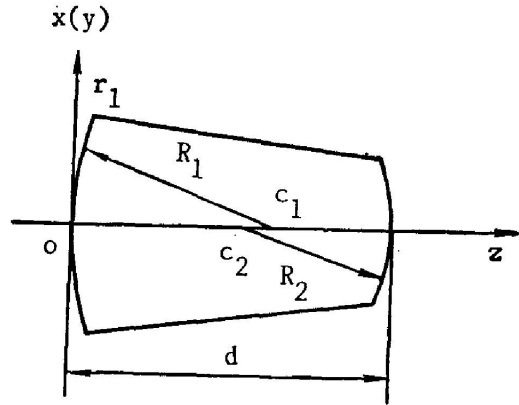


Fig. 1 Conical GRIN rod lens with spherical surfaces

$$\left. \begin{aligned}
 H_1(z) &= -\frac{L}{b} \sqrt{t(z)} \sin [b \ln t(z)], \\
 \dot{H}_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{t(z)}} \left\{ \cos [b \ln t(z)] + \frac{1}{2b} \sin [b \ln t(z)] \right\}, \\
 H_2(z) &= \sqrt{t(z)} \left\{ \cos [b \ln t(z)] - \frac{1}{2b} \sin [b \ln t(z)] \right\} \\
 &\quad + \frac{n_0 - 1}{n_0 R_1} \cdot \frac{L}{b} \sqrt{t(z)} \sin [b \ln t(z)], \\
 \dot{H}_2(z) &= -\frac{g_0^2 L}{b \sqrt{t(z)}} \sin [b \ln t(z)] \\
 &\quad - \frac{n_0 - 1}{n_0 R_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{t(z)}} \left\{ \cos [b \ln t(z)] + \frac{1}{2b} \sin [b \ln t(z)] \right\},
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

(9)式分别描述两条初始条件为 $r_0=0$, $\theta_0=n_0$ 和 $r_0=1$, $\theta_0=0$ 的特定入射光线在梯度折射率透镜中的传播轨迹。

当光线传播到达小端球面时经其折射进入像空间, 由折射定律得光线出射位置和倾角

$$\left. \begin{aligned}
 r &= H(z), \\
 \theta &= n_0 \dot{H}(z) - \frac{1-n_0}{R_2} H(z),
 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

式(10)表示为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1-n_0}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H(z) \\ n_0 \dot{H}(z) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

将(8)式代入(11)式得

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1-n_0}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2(z) & H_1(z)/n_0 \\ n_0 \dot{H}_2(z) & \dot{H}_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

现引入以下函数(端面平面时的光线轨迹)^[7]

$$\left. \begin{aligned}
 H_1(z) &= -\frac{L}{b} \sqrt{t(z)} \sin [b \ln t(z)], \\
 \dot{H}_1(z) &= \frac{1}{\sqrt{t(z)}} \left\{ \cos [b \ln t(z)] + \frac{1}{2b} \sin [b \ln t(z)] \right\}, \\
 H_2(z) &= \sqrt{t(z)} \left\{ \cos [b \ln t(z)] - \frac{1}{2b} \sin [b \ln t(z)] \right\}, \\
 \dot{H}_2(z) &= \frac{g_0^2 L}{b \sqrt{t(z)}} \sin [b \ln t(z)],
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

则(12)式可进一步表示成

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1-n_0}{R_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2(z) - \frac{n_0-1}{n_0 R_1} H_1(z) & \frac{H_1(z)}{n_0} \\ n_0 \dot{H}_2(z) - \frac{n_0-1}{R_1} \dot{H}_1(z) & \dot{H}_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_2(z) & \frac{H_1(z)}{n_0} \\ n_0 \dot{H}_2(z) & \dot{H}_1(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} = T_{f_2} \cdot T_n \cdot T_{f_1} \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix}, \quad (14)
 \end{aligned}$$

式中 $\varphi_1 = [(n_0 - 1)/R_1]$, $\varphi_2 = -[(n_0 - 1)/R_2]$; T_{f_1} , T_n 和 T_{f_2} 分别为

$$\left. \begin{aligned} T_{f1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi_1 & 1 \end{pmatrix}, \\ T_{fl} &= \begin{pmatrix} H_2(z) & \frac{H_1(z)}{n_0} \\ n_0 \dot{H}_2(z) & \dot{H}_1(z) \end{pmatrix}, \\ T_{f2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varphi_2 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

显然, T_{f1} 和 T_{f2} 分别是光焦度为 φ_1 和 φ_2 的均匀薄透镜的传递矩阵; 而 T_{fl} 为两端面为平行平面的锥形梯度折射率透镜的传递矩阵^[8]。因此, (14) 式表明, 两端面为球面的锥形梯度折射率透镜可以视为由一个光焦度为 φ_1 的薄透镜、一个两端面为平行平面的厚度为 $z=d$ 的锥形梯度折射率透镜以及另一个光焦度为 φ_2 的薄透镜在空气中密接而成的等效光学系统。这与均匀介质的厚透镜的等效系统相类似。不同的是, 在均匀情形中间是一块无光焦度的平行平面玻璃板, 而在非均匀情形下中间则是一段具有一定光焦度的梯度折射率棒。利用这种等效光学系统处理, 可以简化梯度折射率光学系统高斯参数的确定及根据初级像差理论进行初始结构的求解, 即确定 R_1 、 R_2 和 d 。

球面端面的锥形梯度折射率透镜(或其等效系统)的传递矩阵为

$$\left. \begin{aligned} T_{sp} &= T_{f2} \cdot T_{fl} \cdot T_{f1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \\ A &= H_2(z) - \frac{1}{n_0} \varphi_1 H_1(z), \\ B &= \frac{1}{n_0} H_1(z), \\ C &= n_0 \dot{H}_2(z) - \varphi_1 \dot{H}_1(z) - \varphi_2 H_2(z) + \frac{1}{n_0} \varphi_1 \varphi_2 H_1(z), \\ D &= \dot{H}_1(z) - \frac{1}{n_0} \varphi_2 H_1(z), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将(16)、(13)和(5)式代入矩阵的行列式, 容易证明: $\det T_{sp} = AD - BC = 1$ 。这是光学系统传递矩阵的特性。

三、透镜的近轴成像特性

考虑球面端面的锥形梯度折射率透镜的近轴成像。如图 2 所示, 设物体 AB 位于透镜大端球面前 l_0 处, 经透镜所成的像位于小端球面之后 l'_0 处。如以 r_2 、 θ_2 和 r_1 、 θ_1 分别表示像面和物面上的光线位置及倾角, 则成像系统可用如下矩阵表示

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} r_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} &= T_i \begin{bmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix}, \\ T_i &= \begin{pmatrix} 1 & l'_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -l_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+l'_0 C & B+l'_0 D - l_0 A - l'_0 C \\ C & D - l_0 C \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中 T_i 称为光学系统总的成像矩阵, 它等于光线在自由空间 l_0 、球面端面梯度折射率透镜

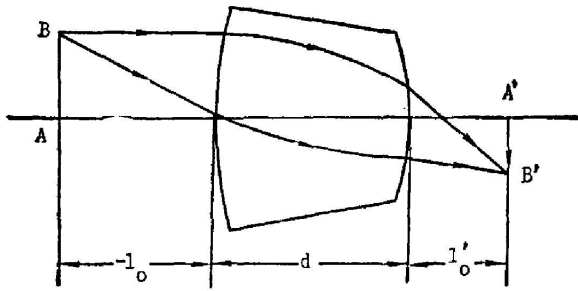


Fig. 2 Imaging principle of conical GRIN lens with spherical surfaces

及自由空间 l_0 中的传递矩阵之积。

根据透镜传递矩阵的性质, 可得像距 l'_0 和像的放大率 β

$$l'_0 = \frac{l_0 A - B}{D - l_0 C}, \quad (18)$$

$$\beta = \frac{1}{D - l_0 C}. \quad (19)$$

由(16)式与(17)式相比较可得球面端面锥形梯度折射率透镜的光焦度 φ 为

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{f'} = -\frac{1}{f} = -C \\ &= -\left[n_0 \dot{H}_2(z) - \varphi_1 \dot{H}_1(z) - \varphi_2 H_2(z) + \frac{1}{n_0} \varphi_1 \varphi_2 H_1(z) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

利用光学系统的合成方法, 可算出光焦度为 φ_1 的薄透镜, 光焦度为 $\varphi_2 = -n_0 \dot{H}_2(z)$ 的平行平面端面的锥形梯度折射率透镜及光焦度为 φ_1 的薄透镜在空气中密接而成的组合系统的光焦度, 与(19)式的结果一致。由此, 基于传递矩阵特征提出的等效光学系统的正确性从光焦度的结果再次得到了证实。

由(18)式, 令 $l_0 \rightarrow \infty$ 得物方焦点位置

$$l_f = \frac{D}{C} = \frac{\dot{H}_1(z) - (1/n_0) \varphi_2 H_1(z)}{n_0 \dot{H}_2(z) - \varphi_1 \dot{H}_1(z) - \varphi_2 H_2(z) + (1/n_0) \varphi_1 \varphi_2 H_1(z)}, \quad (21)$$

由(18)式, 令 $l_0 \rightarrow \infty$ 得像方焦点位置

$$l'_f = -\frac{A}{C} = -\frac{H_2(z) - (1/n_0) \varphi_1 H_1(z)}{n_0 \dot{H}_2(z) - \varphi_1 \dot{H}_1(z) - \varphi_2 H_2(z) + (1/n_0) \varphi_1 \varphi_2 H_1(z)}, \quad (22)$$

由(18)式, 令 $\beta = 1$ 得成像在像方主面的物距, 即物方主面位置

$$l_h = \frac{D-1}{C} = \frac{\dot{H}_1(z) - (1/n_0) \varphi_2 H_1(z) - 1}{n_0 \dot{H}_2(z) - \varphi_1 \dot{H}_1(z) - \varphi_2 H_2(z) + (1/n_0) \varphi_1 \varphi_2 H_1(z)}, \quad (23)$$

将 $l_0 = l_h$ 代入(18)式, 并计及 $AD - BC = 1$ 得像方主面位置

$$l'_h = -\frac{A-1}{C} = \frac{H_2(z) - (1/n_0) \varphi_1 H_1(z) - 1}{n_0 \dot{H}_2(z) - \varphi_1 \dot{H}_1(z) - \varphi_2 H_2(z) + (1/n_0) \varphi_1 \varphi_2 H_1(z)}, \quad (24)$$

如果物距和像距以物方主面和像方主面为基准计算, 即

$$\left. \begin{aligned} l &= l_0 - l_h, \\ l' &= l'_0 - l'_h, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

则物像公式(18)式可化为如下高斯公式

$$\frac{1}{l'} - \frac{1}{l} = \frac{1}{f'}, \quad (26)$$

对厚度为 d 的梯度折射率透镜, 上述诸公式中令 $z = d$, $t(z) = 1 - (d/L) = r_2/r_1$ 。

四、讨 论

综上所述, 我们提出了两端面为球面的锥形梯度折射率透镜的一种等效光学系统。并

从透镜的 $ABCD$ 矩阵特征及光焦度角度论证了等效系统是由一光焦度为 φ_1 的薄透镜、一个厚度为 d 的平行平面端面的锥形梯度折射率透镜及另一个光焦度为 φ_2 的薄透镜在空气中密接而成的光学系统。文中给出了球面端面锥形梯度折射率透镜的基点、基面位置计算公式以及近轴成像高斯公式, 这些结果在一定条件下也可适用于其它几种梯度折射率透镜。

(1) 当锥度 $m = [(r_1 - r_2)/d] = 0$ 即 $r_1 = r_2$ 时, 锥形化为圆柱形, 此时, $L \rightarrow \infty$ 。以 $(1/b) = 0$, $(b/L) = g_0$ 。及 $b \ln t(z) = -g_0 z$, 代入上述公式即得球面端面的柱形梯度折射率透镜的相应公式。

(2) 当两端面为平面时, 即曲率半径 $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ 时, 在上述公式中令 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ 即得端面为平面的锥形梯度折射率透镜的有关结果^[5~8]。

(3) 当锥度 $m = 0$, 且 $R_1 \rightarrow \infty$ 或 $R_1, R_2 \rightarrow \infty$ 时, 在上述公式中作 $(1/b) = 0$, $(b/L) = g_0$, $b \ln t(z) = -g_0 z$ 及 $\varphi_1 = 0$ 或 $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ 替换, 即得到前端面为平面或两个端面均为平面的柱形梯度折射率透镜的相应结果。可见, 本文的公式具有一定的普遍性。

目前, 多数梯度折射率光学系统是由若干个球面端面的柱形或锥形梯度折射率透镜组成的。因此, 利用本文导出的单个透镜的基点、基面公式及常规的光学系统的合成计算方法, 就可求得各种梯度折射率光学系统的总的基点、基面位置, 从而解决了这类梯度折射率光学系统的几何光学设计问题。此外, 利用本文提出的对球面端面的锥形梯度折射率透镜的等效光学系统处理, 可以方便地根据初级像差理论求解出系统的初始结构。

参 考 文 献

- [1] M. Kawazu *et al.*; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 7 (Apr), 1105~1112.
- [2] H. Nishi *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 19 (Oct), 3340~3344.
- [3] D. C. Leiner *et al.*; *Appl. Opt.*, 1983, **22**, No. 3 (Feb) 383~386.
- [4] I. Kitano *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 19 (Oct), 3336~3339.
- [5] S. J. S. Brown; *Appl. Opt.*, 1980, **19**, No. 7 (Apr), 1056~1060.
- [6] 殷宗敏等;《物理学报》, 1981, **30**, No. 12 (Dec), 1603~1608.
- [7] C. Gomez-Reino *et al.*; *Appl. Opt.*, 1984, **23**, No. 7 (Apr), 1107~1109.
- [8] C. Gomez-Reino *et al.*; *Appl. Opt.*, 1986, **25**, No. 19 (Oct), 3418~3424.
- [9] 龚祖同等;《全国高速摄影会议论文选集》, (科学出版社, 北京, 1978).

Paraxial imaging characteristics of a conical GRIN rod lens with spherical end surfaces

LIAO TINGDI

ZOUYIRONG

(*Laser Institute, Fujian Normal University, Fuzhou*) (Physics Department, Nanping Teachers College)

(Received 10 September 1988; revised 4 January 1989)

Abstract

In this paper we made a study of ray propagation and transformation through a conical GRIN rod lens with spherical end surfaces based on the formula of ray refraction on the spherical surfaces and the ray equation. On the basis of the ray transmitting matrix obtained an equivalent optical system of the conical GRIN rod lens with spherical end surfaces is proposed. The formulas for determining the principal planes, focal planes and the focal lengths are derived and the paraxial imaging Gaussian formula is also given. All the results can be applied to the cylindrical or radial GRIN rod lens while the taper is made zero.

Key words: gradient index; selfoc lens; optical imaging.