第9卷 第8期
1899年8月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 9, No. 8
August, 1989

非均匀光纤中梯度项对模式的影响

苏科峰
(大连理工大学电子系)

提 要

对弱导非均匀折射率分布光纤的严格理论分析表明，显然在纵向场分量的标量波动方程中能够保留$\nabla\varepsilon$梯度项，但同时在横向场分量的方程中必须略去梯度项。并以TM模为例，给出了梯度项影响的具体表达式；消除了TM与TE模式之间的简并，明确了单模工作条件。

关键词：光纤；模式；标量波动方程；截止频率。

一、引　　言

光纤理论分析的根本方法是基于麦克斯韦方程的波动理论方法。对于非均匀折射率分布芯子光纤，严格的场解必须求解矢量波动方程。由于问题的复杂性，到目前为止，大多数工作都是在弱导条件下导出横向场分量的标量波动方程，并以此为出发点，分析和求解各种具体折射率分析光纤的模场分布及其传播特性。这个标量波动方程略去了梯度项$\nabla\varepsilon$的影响，是$\nabla\varepsilon$的零阶近似结果[1,2]。但对$\nabla\varepsilon$项的影响程度的估计是一项具有理论和实际意义的工作。文献[3、4]对薄膜光波导中$\nabla\varepsilon$项的影响作了研究。

本文首先从麦氏方程入手，严格地导出非均匀折射率分布弱导光纤中的标量波动方程，指出文献[2]中的横向标量波动方程略去了$\nabla\varepsilon$梯度项；然后以TM模式为例给出梯度项$\nabla\varepsilon$对模式影响的具体表达式，消除了TM与TE模式之间的简并，指明了单模工作的条件。

二、弱导非均匀光纤中的标量波动方程

在非均匀光纤中，相对介电常数ε(者折射率n)*。是横向坐标的函数。设真空中的磁导率为μ。并设模场的时谐因子为$e^{i\omega t}$，传播因子为$e^{-i\beta z}$。将模场和哈密顿(Hamilton)算子∇分解为横向分量和纵向分量，即$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_t+E_z\boldsymbol{i}_z$，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_t+H_z\boldsymbol{i}_z$，$\nabla=\nabla_t+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{i}_z=\nabla_t-i\beta\boldsymbol{i}_z$，代入麦克斯韦方程组，得在光波导结构中的麦氏方程组为

$$\nabla_t\cdot(\boldsymbol{E}_t\times\boldsymbol{i}_z)=-i\omega\mu H_z, \tag{1}$$

$$\nabla_t\cdot(\boldsymbol{H}_t\times\boldsymbol{i}_z)=i\omega\varepsilon_0\varepsilon E_z, \tag{2}$$

$$\nabla_t\cdot\boldsymbol{E}_t+\frac{\nabla_t\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{E}_t=i\beta E_z, \tag{3}$$

收稿日期：1988年9月9日；收到修改稿日期：1989年1月27日

* $\varepsilon=n^2$，文中ε与n并用。

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{H}_t = i\beta H_z, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{1}{T_2}(i\omega\mu \boldsymbol{i}_z \times \nabla_t H_z - i\beta\nabla_t E_z), \tag{5}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{1}{T^2}(-i\omega\varepsilon_0\varepsilon \boldsymbol{i}_z \times \nabla_t E_z - i\beta\nabla_t H_z), \tag{6}$$

$$\nabla_t^2 E_z + T^2 E_z - \frac{\beta^2}{T^2}\frac{\nabla_t\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\nabla_t E_z = \frac{\omega\mu\beta}{T^2}\frac{\nabla_t\varepsilon}{\varepsilon}\cdot(\boldsymbol{i}_z\times\nabla_t H_z), \tag{7}$$

$$\nabla_t^2 H_z + T^2 H_z - \frac{k^2}{T^2}\frac{\nabla_t\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\nabla_t H_z = -\frac{\omega\beta}{T^2}\nabla_t\varepsilon\cdot(\boldsymbol{i}_z\times\nabla_t E_z), \tag{8}$$

式中 $k^2=\omega^2\mu\varepsilon_0\varepsilon$; $T^2=k^2-\beta^2$; β 为传播常数; ε_0 为真空中的介电常数; $\boldsymbol{i}_z$ 为纵向单位矢量; 下标 t 表示横向,下标 z 表示纵向。

由上述方程可见,对于横向不均匀分布的光波导, E_z 和 H_z 是互相耦合的联立方程,直接求解是很困难的。

在光纤中,引入圆柱坐标(r, θ, z)相对介电常数沿径向不均匀

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1[1-2\Delta f(r)]; & r\leqslant a \\ \varepsilon_2, & r>a \end{cases} \tag{9}$$

式中 $\varepsilon_1=n_1^2$ 为芯区介电常数最大值, $\varepsilon_2=n_2^2$ 为包层区的常数介电常数, a 为芯区半径。$\Delta=[(n_1-n_2)/n_1]$为芯与包层间的折射率差, $f(r)$为单调递增函数,对于弱导非均匀光纤,满足条件 $\Delta\ll1$, $0<[\Delta f(r), \Delta f'(r)]\ll1$。令

$$E_z=\frac{\omega^2\mu\varepsilon_1}{\beta}\varphi, \quad H_z=i\omega\varepsilon_1\phi, \tag{10}$$

并设波场的角向传播因子为 $e^{-im\theta}$(m 为场在角向变化的周期数,为整数),代入方程(7), (8)有

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dk}+\left(T^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\varphi-\left(\frac{k^2}{T^2}-1\right)\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr}\frac{d\varphi}{dr}=-\left(\frac{k^2}{T^2}-1\right)\frac{m}{r}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr}\phi, \tag{11}$$

$$\frac{d^2\phi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}+\left(T^2-\frac{m^2}{r^2}\right)\phi-\frac{k^2}{T^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr}\frac{d\phi}{dr}=-\frac{k^2}{T^2}\frac{m}{r}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr}\varphi。 \tag{12}$$

1. 横电、磁波模式

对于轴对称分布的波场, $m=0$, (11)、(12)两方程去耦, φ 和 ϕ 可以分别独立求解。

(1) $\varphi=0$, $\phi\neq0$ 对应于 TE 模式。将式(10)代入(5)式有

$$\boldsymbol{E}_t=-\frac{k_1^2}{T^2}\frac{d\phi}{dr}\boldsymbol{i}_\theta, \tag{13}$$

式中 $k_1^2=\omega^2\mu\varepsilon_0\varepsilon_1$, $\boldsymbol{i}_\theta$ 为角向单位矢量。(13) 式即 $E_r=0$, $E_\theta=-(k_1^2/T^2)(d\phi/dr)$; 又由(1)、(10)式得

$$\phi=\frac{1}{k_1^2}\nabla_t(E_\theta\boldsymbol{i}_r)=\frac{1}{k_1^2}\left(\frac{dE_\theta}{dr}+\frac{1}{r}E_\theta\right), \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{i}_r$ 为径向单位矢量。(13)与(14)联立消去 ϕ 得

$$\frac{d^2E_\theta}{dr^2}+\frac{1}{r^2}\frac{dE_\theta}{dr}+\left(T^2-\frac{1}{r^2}\right)E_\theta=0。 \tag{15}$$

(2) $\phi=0$, $\varphi\neq0$ 对应于 TM 模式。由(10)及(5)式得

$$\boldsymbol{E}_t=-\frac{ik_1^2}{T^2}\nabla_t\varphi=-\frac{ik_1^2}{T^2}\frac{d\varphi}{dr}\boldsymbol{i}_r,\tag{16}$$

此式即 $E_\theta=0$, $E_r=-(ik_1^2/T^2)(d\varphi/dr)$。由(3)和(10)式得

$$\varphi=-\frac{i}{k_1^2}\left(\frac{dE_r}{dr}+\frac{1}{r}E_r+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr}E_r\right),\tag{17}$$

略去 $(d\varepsilon/\varepsilon dr)E_r$ 项，由(17)与(16)联立消去 φ 后得

$$\frac{d^2E_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dE_r}{dr}+\left(T^2-\frac{1}{r^2}\right)E_r=0。\tag{18}$$

2. 混合模式

当 $m\neq0$ 时，方程(11)和(12)中的 φ 和 ϕ 不能分别独立求解，场的两个纵向场分量 E_z 和 H_z 必同时存在，构成混合模式。但在弱导条件下 $n(r)\approx n_1$, n_2 及

$$\frac{k^2}{T^2}=\frac{k_0^2n^2(r)}{k_0^2n^2(r)-\beta^2}\geqslant\frac{n^2(r)}{n_1^2-n_2^2}\approx\frac{n_1^2}{n_1^2-n_2^2}\approx\frac{1}{2\Delta}\gg1。\tag{19}$$

这里引用了传导模条件 $n_2<\beta<n_1$。在(19)式的条件下，方程(11)与(12)具有相同的形式

$$\left.\begin{aligned}M\varphi=N\phi,\\ M\phi=N\varphi,\end{aligned}\right\}\tag{20}$$

其中算子

$$M=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}+T^2-\frac{m^2}{r^2}-\frac{k^2}{T^2}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr},$$

$$N=-\frac{k^2}{T^2}\frac{m}{r}\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr}。$$

显然，$\varphi=\pm\phi$ 是方程(20)的两组解。$\varphi=\phi$ 对应于 HE 模式，$\varphi=-\phi$ 对应于 EH 模式。须特别指出的是，由于不能保证 $(k^2/T^2)(d\varepsilon/\varepsilon dr)\ll1$，所以，在纵场分量的方程中应保留到 $(d\varepsilon/\varepsilon dr)$ 项。

将 $\varphi=\pm\phi$ 代入(5)式得

$$\boldsymbol{E}_t=-\frac{k_1^2}{T^2}(\boldsymbol{i}_z\times\nabla_t\phi\pm i\nabla_t\phi)=R_i(r)(\mp i\boldsymbol{i}_r-\boldsymbol{i}_\theta),\tag{21}$$

$$R_i(r)=\frac{k_1^2}{T^2}\left(\frac{d\phi}{dr}\pm\frac{m}{r}\phi\right),\tag{22}$$

下标 $i=1$, 2 分别对应于 HE 模式(上符号)和 EH 模式(下符号)。

将(10)式和(21)式代入(1)式得

$$\phi=-\frac{1}{k_1^2}\left(\frac{dR_i}{dr}+\frac{1\mp m}{r}R_i\right),\tag{23}$$

(22)与(23)联立消去 ϕ 可得

$$\frac{d^2R_i}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR_i}{dr}+\left[T^2-\frac{(m\mp1)^2}{r^2}\right]R_i=0,\tag{24}$$

此处须着重指出的是，由(3)式也可得到 ϕ 与 R_i 的关系，这个关系式为

$$\phi=-\frac{1}{k_1^2}\left(\frac{dR_i}{dr}+\frac{1\mp m}{r}R_i+\frac{d\varepsilon}{\varepsilon dr}R_i\right),\tag{25}$$

但是由(22)与(23)联立消去 R_i 后可以得到方程(20)，而由(22)与(25)联立消去 R_i 后却得不到方程(20)。所以，方程(22)、(23)与方程(20)是自洽的；而只有在(25)式中略去 $(d\varepsilon/\varepsilon dr)$ 项后才能与(20)、(23)相一致。

由上述分析得如下结论：

(1) 由方程(15)，(18)，(24)可知，在弱导条件下，TE，TM，HE和EH模式的横向场分量场满足相同形式的标量波动方程

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}+\left(T^2-\frac{l^2}{r^2}\right)R=0, \tag{26}$$

其中

$$l=\begin{cases}1, & \text{TE, TM 模}\\ m-1, & \text{HE 模}\\ m+1, & \text{EH 模}\end{cases} \tag{27}$$

(2) 对于TE模式，方程(26)是严格的，即对非弱导光纤也是成立的；

(3) 对于TM模和HE、EH模式，由于$(d\varepsilon/\varepsilon dr)$项影响的存在，就不可能得到(26)式所示的标量波方程的。

三、梯度项对TM模式的影响

如计及$(d\varepsilon/\varepsilon dr)$项的影响，对混合模式只能得到矢量波动方程。但对TM模，仍然可以得到标量波动方程。由于问题的复杂性，这里我们只考虑TM模的情况。

将(17)与(16)式联立，消去φ得

$$E_r''+\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)E_r'+\left(T^2-\frac{1}{r^2}+\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}-\frac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2}\right)E_r=0, \tag{28}$$

这是TM模的模向电场分量在非均匀光纤中所满足的严格的标量波动方程。令

$$E_r=\frac{1}{\sqrt{r\varepsilon}}Q, \tag{29}$$

代入方程(28)得

$$Q''+\left[T^2-\frac{3}{4}\frac{1}{r^2}-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon'}{r\varepsilon}-\frac{3}{4}\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon}\right]Q=0, \tag{30}$$

考虑芯区为平方律分布的光纤

$$\varepsilon=\varepsilon_1\left[1-2\Delta\left(\frac{r}{a}\right)^2\right], \tag{31}$$

求出ε', ε''展开式，并略去Δ^3以上的高阶项。将这些结果和(31)式代入方程(30)式得

$$Q''+\left[k_0^2\varepsilon_1\left(1-2\alpha\Delta\frac{r^2}{a^2}\right)-\beta^2-\frac{3}{4}\frac{1}{r^2}\right]Q=0, \tag{32}$$

$$\alpha=1+\frac{6\Delta}{k_0^2\varepsilon_1a^2}=1+\frac{12\Delta^2}{v^2}, \tag{33}$$

式中$v=k_0n_1a\sqrt{2\Delta}$为归一化频率。

将方程(32)与文献[5]中的方程(1-7)比较(令$m=1$)可知，当计及介电常数的梯度项的影响后，除了应在(29)式中多一个$\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$的因子外，梯度项的作用相当于使芯——包层折射率差$\Delta$增大$\alpha$倍。

相应地，由文献[5]中的(1-16)式，无穷似透镜平方律分布媒质中TM模的传播常数应修正为下式

$$\beta_n^2=k_0^2n_1^2-\frac{4\sqrt{2\Delta\alpha}}{a}k_0n_1(n+1), \tag{34}$$

而模场分布表达式中的 Δ 亦应修正为 $\alpha\Delta$。

此外，考察一下 TE_{01} 模与 TM_{01} 模的归一化截止频率之间的关系。不考虑梯度项的作用时，TE_{01} 与 TM_{01} 模和 HE_{21} 模是简并的，这可由(26)和(27)式看出。它们的截止频率相等，记为 v_c。因为方程(26)对 TE_{01} 模是严格成立的，所以这个截止频率 v_c 对 TE_{01} 模是准确的；但对 TM_{01} 和 HE_{21} 模是有误差的。对 TE_{01} 模，TM_{01} 模分别有

$$v_c=k_0n_1a\sqrt{2\Delta}=v_c^{TE}, \tag{35}$$

$$v_c=k_0n_1a\sqrt{2\Delta\alpha}=v_c^{TM}\sqrt{\alpha}, \tag{36}$$

由(35)和(36)式可得

$$(v_c^{TM})^2=(v_c^{TE})^2-12\Delta^2, \tag{37}$$

(37)式说明，对于折射率为平方律分布的光纤，TE_{01} 模式的截止频率高于 TM_{01} 模式的截止频率。准确的数值计算表明[6]，$v_c^{HE_{21}}>v_c^{TE_{01}}>v_c^{TM_{01}}$。为保证单模传输，我们可利用 TE_{01} 模的准确的截止归一化频率 $v_c^{TE_{01}}$ 由(37)式修正得到 TM_{01} 模的截止频率，$v<v_c^{TM_{01}}$ 即为单模工作条件。

四、结　束　语

用标量波动方程方法分析求解非均匀弱导光纤中的模式场分布和传播特性，其结果与实际情况吻合较好。要想获得更精确的结果，一般都要进行复杂繁锁的数值解。本文在理论上严格地导出标量波方程，指出该方程成立的条件是略去了 $\nabla\varepsilon$ 梯度项对横向场分量的影响。由于问题的复杂性，只对 TM 波讨论了梯度项对模式的影响，消除了 TM 与 TE 模式间的简并，并给出 TM_{01} 模与 TE_{01} 模归一化截止频率之间的关系，指明了单模工作条件。

参　考　文　献

[1] W. Streifer, C. N. Kurtz; *J. O. S. A.*, 1967, **57**, No. 6 (Jun), 779~786.

[2] C. N. Kurtz, W. Streifer; *IEEE Trans. Microwave Theory & Tech.*, 1969, **MTT-17**, No. 1 (Jan), 11~15.

[3] D. Marcuse; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1973, **QE-9**, No. 9 (Sep), 958~960.

[4] A. K. Ghatak, L. A. Kraus; *IEEE J. Quant. Electron.*, 1974, **QE-10**, No. 4 (Apr), 465~467.

[5] 叶培大;《光纤理论》,(知识出版社,1985).

[6] E. Bianciard, V. Rizzili; *Opt. & Quant. Electron.*, 1977, **9**, No. 2 (Mar), 121~133.

The effect of gradient term on the modes of inhomogeneous optical fiber

SU KEFENG

(Department of Electronics, Dalian University of Technology)

(Received 9 September 1988; reviced 27 January 1989)

Abstract

Rigrous analysis for weakly-guiding inhomogeneous refractive index profile optical fiber shows that, while the gradient term can be included in scalrr wave equations of longitudinal field component, it must be neglected in the transverse field equations. Specific expressions of the effect of term on TM modes are obtained, hence the degeneracy between TM and TE modes is eliminated and the single-mode condition is clarified.

Key words: optical fiber; mode; wave equation; cut-off frequency.