第9卷 第8期
1989年8月

光 学 学 报
ACTA OPTICA SINICA

Vol. 9, No. 8
August, 1989

计算全息图产生的锥面波在激光准直中的应用

郑 刚 顾去吾
(上海机械学院光仪教仪室)

提 要

本文提出了用计算全息图产生锥面波的方法。将全息图置于激光光路中，它的衍射图样中心在空间形成了一条准直线。文中对锥面波的传播、准直精度及准直距离作了理论分析，给出了实验结果。

关键词：全息图，锥面波，准直。

一、引 言

早在1954年Mcleod提出了将玻璃圆锥体(Axicon)用于准直的方法[1]。当光照射玻璃锥时，玻璃锥折射出锥面波，锥面波的锥顶即衍射图样的中心在空间连成一条直线即为准直线。但是这种方法存在明显的缺点。一是玻璃锥体加工困难，二是玻璃材料的均匀性及面形误差直接影响准直精度。本文运用全息学原理，用一张计算全息图代替玻璃锥体，在平面波照射下衍射出锥面波，衍射图样的中心是亮点，它们在空间连成一条清晰的、亮度足够的准直线。本文从理论上分析了计算全息图在平行光照射下的衍射光性质，研究了这种准直方法的精度及准直距离，实验结果与理论分析一致。这种方法较之其他的激光准直方法(如波带片法)显得更为简单、方便，具有较高的应用价值。

二、原 理

1. 产生锥面波的计算全息图

图1是用来产生锥面波的计算全息图实物照片，它由透明及不透明的同心圆环组成，各个圆环之间的间隔相等。容易想到，如果一个锥面波与一个平面波同轴相干涉，则会产生如图1所示的干涉图样；或者用全息学中的概念，设物波为锥面波，参考波为平面波，则图1即物波与参考波相干涉而成的全息图。将这个全息图置于图2所示的激光准直系统(即全息图的再现光路)中，在平面波(即参考波)照明下，全息图再现出一个锥面波(即原始物波)，锥面波的锥顶，或者说平行光通过全息图后衍射图样的中心，在空间形成一条亮线，这条亮线即为准直线。亮线存在的范围即为准直距离，亮斑的大小决定准直的精度。由下面的分析可以知道，准直距离及亮斑大小完全由波长及计算全息图的几何尺寸确定。

收稿日期：1987年8月1日；收到修改稿日期：1989年2月21日

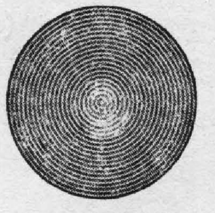


Fig. 1　Computer generated hologram

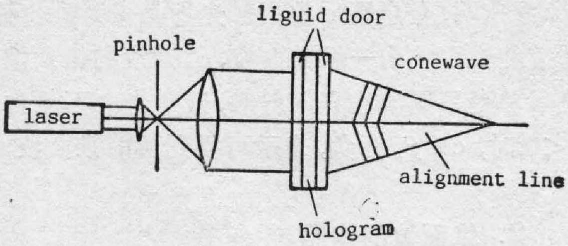


Fig. 2　Laser alignment system

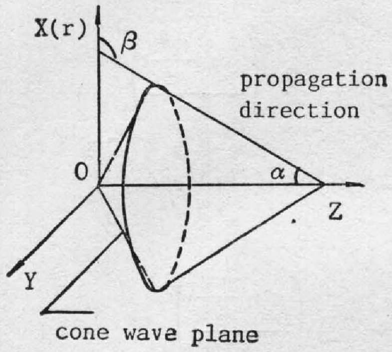


Fig. 3　Schematic diagram for cone wavefront

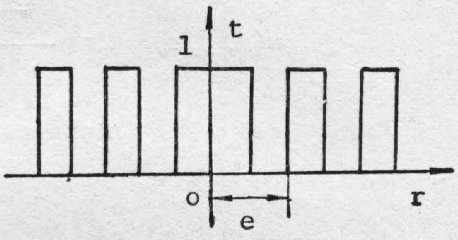


Fig. 4　Amplitude transmittance of CHG

下面我们从理论上来研究全息图在平行光照射下的衍射光性质。图 3 是锥面波的示意图，它的复振幅为

$$u(x,\ y,\ z)=A\exp[ik(\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta+z\cos\alpha)]=A\exp[ik(r\cos\beta+z\cos\alpha)],\qquad(1)$$

式中 r 为径向坐标，β 为传播方向与 r 轴的夹角，α 为传播方向与 z 轴的夹角。在 X、Y 平面上($z=0$)

$$u(x,\ y,\ 0)=A\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta)=A\exp(ikr\cos\beta)。\qquad(2)$$

图 4 为计算全息图的振幅透过率曲线，r 为全息图上任一点到全息图中心的距离，e 为径向周期。则透过率 $t(r)$ 为

$$t(r)=\mathrm{circ}\left(\frac{r}{l}\right)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\left(\cos\frac{2\pi r}{e}\right)\right],\qquad(3)$$

式中 $\mathrm{circ}(r/l)$ 表示全息图具有半径为 l 的圆形孔径。在单位振幅的平面波垂直照明的情况下，透过全息图后的振幅为

$$u(r)=1\cdot t(r)=t(r)。$$

为了清楚起见，将其按傅里叶级数展开，并表示成直角坐标形式($r=\sqrt{x^2+y^2}$)，则

$$u(x,\ y)=\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\exp\left(in\frac{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}{e}\right),\qquad(4)$$

式中因子 $\exp(in2\pi\sqrt{x^2+y^2}/e)$ 与 (2) 式中因子 $\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta)$ 形式类似，只是此处 $\cos\beta_n=(n\lambda/e)$，于是(4)式变为

$$u(x,\ y)=\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta_n)。\qquad(5)$$

(5)式表明，全息图后的衍射光场是一系列传播方向与 r 轴成 β_n 角的锥面波。人们可以称 β_1 对应的锥面波为一级锥面波，β_n 对应的锥面波为 n 级锥面波。当 n 为偶数时 $\sin(n\pi/2)/n\pi$，表示单色平面波垂直入射时，透射光中不包含 n 为偶数的成分，亦即没有偶数级锥面波，当 $n<0$ 时，$\cos\beta_n$ 为负，表示可得到实的锥面波，当 $n>0$ 时，$\cos\beta_n$ 为正，表示可得到虚的锥面波。

2. 锥面波的传播

现在分析一下由全息图衍射的锥面波的传播。按照(1)式，向右传播的锥面波的复振幅可写成

$$u(x,\ y,\ z)=\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\right)\left[\frac{1}{2}e^{ikz}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\right.$$
$$\left.\times\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta_n)\exp(ikz\cos\alpha_n)\right],$$

或写成

$$u(x,\ y,\ z)=\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\right)e^{ikz}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\right.$$
$$\left.\times\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta_n)\exp[ikz(\cos\alpha_n-1)]\right\},\tag{6}$$

式中 α_n 为锥面波的传播方向与 z 轴的夹角，由图3知

$$\cos\alpha_n=\sin\beta_n=\sqrt{1-\cos^2\beta_n}=\left(1-\frac{n^2\lambda^2}{e^2}\right)^{1/2}。$$

因为 $(n^2\lambda^2/e^2)$ 较小，(6)式的位相项可用二项式定理展开，取一级近似有

$$\varphi_n=kz(\cos\alpha_n-1)=kz\left[\left(1-\frac{n^2\lambda^2}{e^2}\right)^{1/2}-1\right]\approx kz\left(-\frac{n^2\lambda^2}{2e^2}\right)=-z\pi\frac{n^2\lambda}{e^2},$$

在 $z=m(2e^2/\lambda)\ (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ 平面上，$\varphi_n=-2mn^2\pi$，于是(6)式变为

$$u(x,\ y,\ z)=\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\right)e^{ikz}\left[\frac{1}{2}+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta_n)\right]$$
$$=\operatorname{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\right)e^{ikz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta_n)。$$

可以看出，除了位相因子 $\exp(ikz)$ 外，上式与(5)式相同，因为实际观察到的是强度，位相因子被消去，得

$$I=u(x,\ y,\ z)u^*(x,\ y,\ z)$$
$$=\operatorname{circ}^2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l}\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\exp(ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta_n)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)$$
$$\times\exp(-ik\sqrt{x^2+y^2}\cos\beta_n)。$$

这就是说，当 $z=(2e^2/\lambda),\ (4e^2/\lambda),\ \cdots,\ (2me^2/\lambda)$ 时，得到全息图的像，此即所谓的Talbot效

应，所成的像叫 Talbot 像(图 5)。从以上分析还可以看出，如果挡掉从全息图衍射的零级分量，那么 Talbot 效应不再存在。

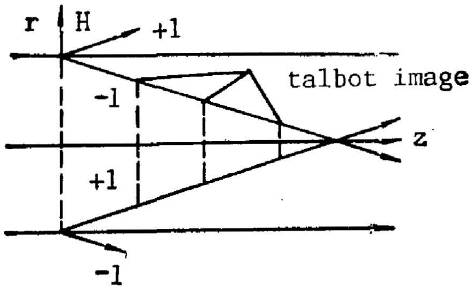


Fig. 5　Talbot effect of CGH

3. 全息图的制作、准直距离及准直精度

如图 6 所示，设全息图的直径为 D，所要求的准直距离为 L，那么由平面参考波照射全息图再现的一级锥面波其传播方向与光轴的夹角为

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{D}{2L}, \tag{7}$$

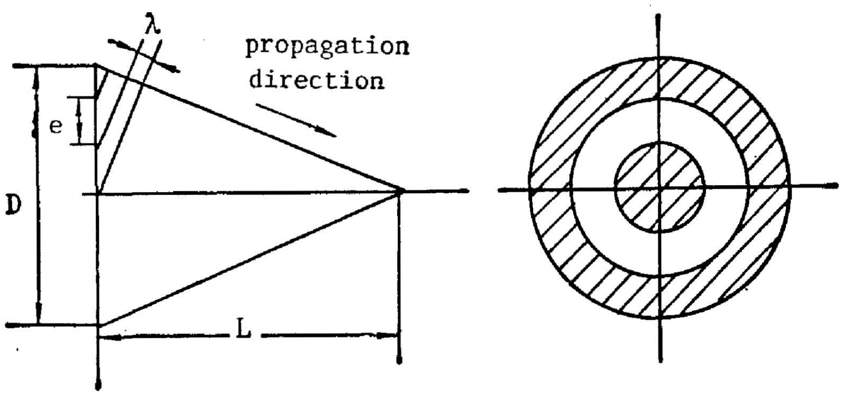
全息图上干涉条纹(圆环)的间距 e 满足下式

$$e = \frac{\lambda}{\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{2L}{D}\lambda, \tag{8}$$

式中 λ 为单色光波波长。根据 (8) 式即可制作全息图，具体步骤如下：(1) 在纸上画出以 $(ne/2)$，$(n=1, 2, \cdots)$ 为半径的一系列同心圆环（可适当放大），然后将奇数或偶数个圆环涂黑；(2) 照相缩小并复制到全息干板上。绘制同心环带的过程可用计算机控制的绘图仪完成或者用于手工完成(见图 6(b)]。

反过来，对于一幅已经制作好的全息图，由它的孔径 D 和圆环间隔 e 可以求得它的准直距离 L 及准直精度。设全息图衍射的锥面波中心亮斑的直径为 d，并设人眼瞄准圆斑的精度为十分之一的圆斑直径，如果忽略高级衍射波的作用，则由图 6(a) 可得

$$d = \frac{\lambda}{2\sin\alpha} \approx \frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{e}{2}。$$



(a)　　(b)

Fig. 6　Geometry of CGH

当考虑到周期物体的 Talbot 效应时，即在全息图的 Talbot 距离上出现全息图的自身像，这时，中心亮斑的直径 $d=e$，所以衍射图样中心亮斑的直径满足下式

$$\frac{e}{2} \leqslant d \leqslant e, \tag{9}$$

而准直精度 Δ 满足

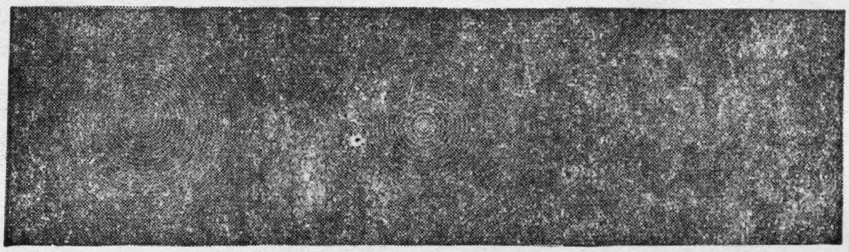
$$\frac{e}{20} \leqslant \Delta \leqslant \frac{e}{10}, \tag{10}$$

准直距离可由(8)式得

$$L=\frac{D}{2\lambda}e_{\circ} \tag{11}$$

三、实　验

根据上述原理及方法实际制作的全息图如图 1 所示，它的结构参数如下：$D=15\,\mathrm{mm}$，$e=0.34\,\mathrm{mm}$。若取 $\lambda=0.6328\,\mu\mathrm{m}$，则由(9)，(11)式算得 $d=(e/2)\sim e=0.17\sim0.34(\mathrm{mm})$，$L=4.029(\mathrm{m})$。将它置于图 2 所示的光学系统中，实际测量了在不同距离处的衍射图样中心亮点宽度及亮点存在的范围，结果同理论值一致。由(10)式知，此时准直精度 $\Delta=0.017\,\mathrm{mm}\sim0.034\,\mathrm{mm}$。图 7(*a*)、(*b*)、(*c*)分别是在 0.5 m，2m，4 m 的的衍射图样照片，注意照片中心有一很小的亮斑。对其他尺寸的全息图也做过实验，实测的中心亮斑宽度及准直距离跟相应的理论值吻合。



(*a*)　　(*b*)　　(*c*)

Fig. 7　Diffraction patterns of CGH

四、讨论与结论

上面已经提到，衍射图样中心亮斑直径的大小决定了准直精度。由(9)式知，中心亮斑直径的最大值 $d_{\max}=e$，出现在 Talbot 像平面上，因此为了提高准直精度，应消除周期物体的 Talbot 效应。由上面的分析易知，滤去零级衍射光，或者使零级光与其他高级次的衍射光分离(离轴全息)，那么 Talbot 效应自然消失，此时在准直距离内，衍射的锥面波的中心亮斑的直径为$(e/2)$将全息图置于图 8 所示的 $4f$ 系统，在其频谱面上放一个高通滤波器，即可滤去全息图的零级衍射光，而采用离轴全息图可使零级光与高级次光分离。离轴全息图的干涉条纹形状与绘制，可由计算机计算及绘制。

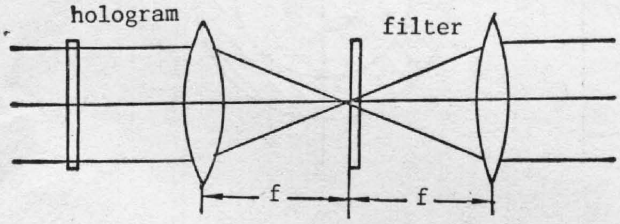


Fig. 8　A coherent optical information processing system

本文所述方法作为激光准直方法的一个补充，具有原理简单，全息图制作方便，准直光路及装置容易实现等优点，可用于准直精度要求不很高的各种场合，具有较高的实用价值。

参 考 文 献

[1] A. C. S. Vanheel; «Ed. by E. Wolf; *Progress in Optics* Vol. 1»,(North-Holland pub. Company-Amsterdam, 1961), 318~327.

[2] J. W. Goodman;«傅里叶光学导论», (科学出版社,北京, *1979*), *88~113*.

[3] 王绍民;«激光», 1980, **7**, No. 3 (Mar), 54~59.

Application of cone wave generated by CGH in laser alignment

ZHENG GANG AND GU QUWU

(*Shanghai Institute of Mechanical Engineering*)

(Received 1 August 1987; revised 21 February 1989)

Abstract

This paper presents a method of generation the cone wave by Com puter Generated Hologram (CGH). When the hologram is illuminated by a plane monochromatic wave, the centre of diffraction pattern of the hologram forms a straight line for alignment. In this paper the transmittance of cone wave as well as alignment precision and alignment distance are theoretically analyzed. The experimental results are given.

Key words: hologram; cone wave; alignment.